CÁLCULO 3, TURMA T2:

02/04/26 - AULA 05

No aula passada começamos introduzindo as funções escalares a várias variáveis reais, ou seja, de $\Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Vimos que o domínio será uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Vejamos outros exemplos.

01) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

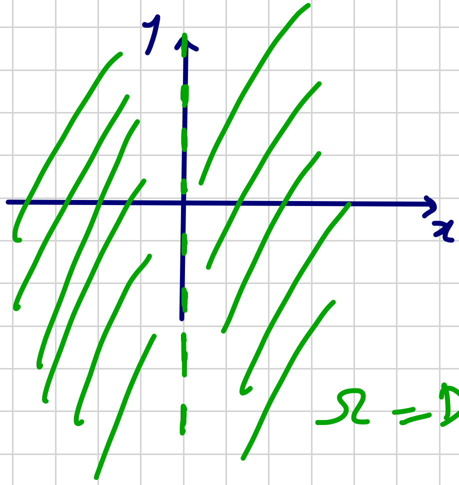
$$f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$D(f) = ?$ A função cosseno tem por domínio todos os reais. Mas, como há uma composição, devemos observar que $x \neq 0$. (pois temos $\frac{1}{x}$ como argumento do cosseno).

Assim, o domínio deve excluir pontos do plano onde $x = 0$.

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

gráfico do domínio:



$\Omega = D(f)$: todo o plano xy exceto a reta $x=0$ (eixo y)

02) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função dada por

$$f(x,y) = \ln(1 - xy).$$

$D(f) = ?$ gráfico do domínio?

solução: Precisamos impor a condição de existência do logaritmo. Lembrando:

$y = \log_b a$: $a > 0$ e $b > 0$; $b \neq 1$

No nosso caso, temos

$$z = f(x,y) = \ln(\underbrace{1 - xy}_{>0})$$

$$1 - xy > 0 \iff -xy > -1 \quad \times(-1)$$

$$xy < 1.$$

Assim:

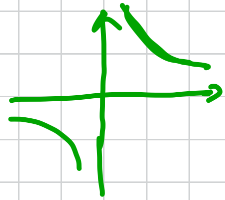
$$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}.$$

gráfico do domínio:

pensando na igualdade teríamos $xy = 1$

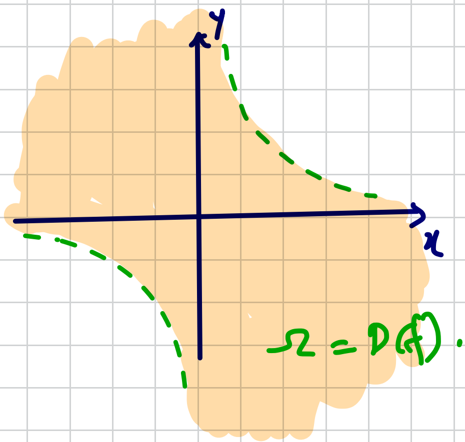
$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{1}{x}.$$

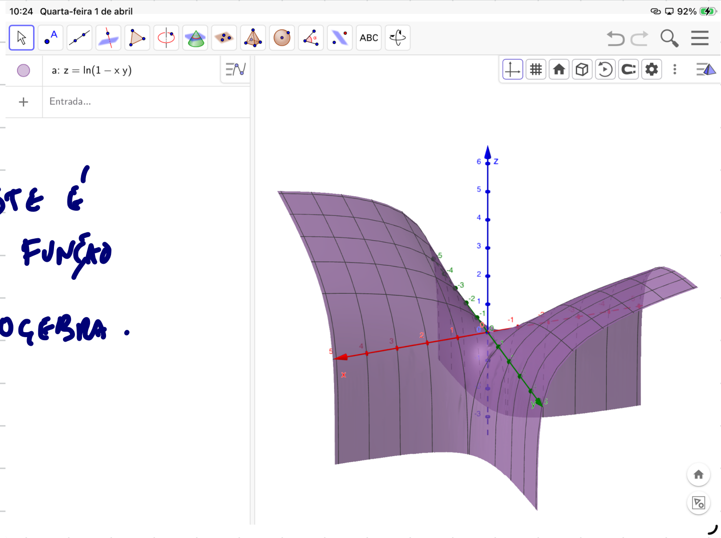


No nosso caso, temos

$$x \cdot y < 1.$$



COMO CURIOSIDADE, ESTE É O ESBOÇO GRÁFICO DA FUNÇÃO (em $\mathbb{R}^3$), PELO GEOGEBRA.



03) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1 - x^2}_{\geq 0}}$$

$D(f) = ?$

gráfico do domínio?

<u>solução</u>: A condição que devemos impor é:

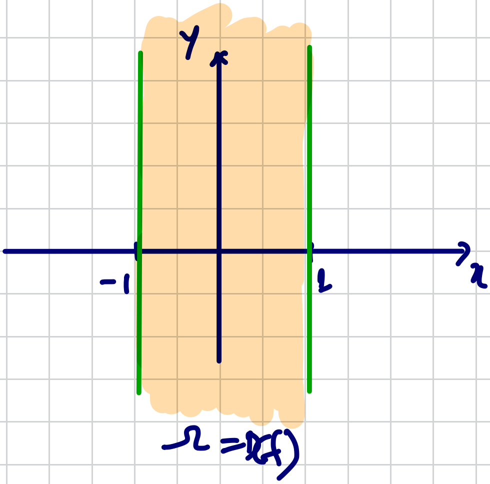
$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1.$$

Assim,

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1\} \text{ ou}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

gráfico do domínio:



04) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-x^2-y^2}_{>0}}}.$$

$D(f) = ?$

gráfico do domínio?

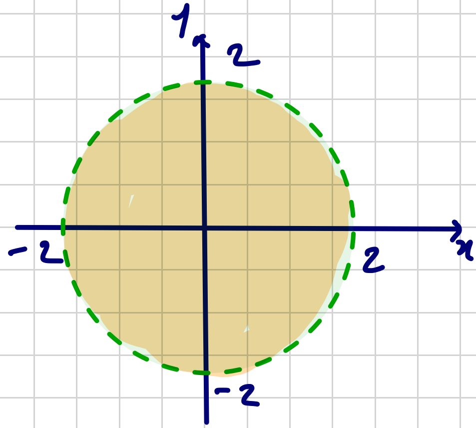
<u>solução</u>: Devemos impor que $4-x^2-y^2>0$

Ou seja; $x^2+y^2<4$.

Então:

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\}.$$

gráfico do domínio:



05) $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por

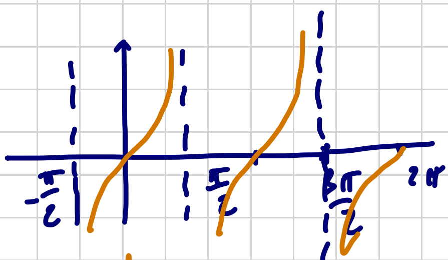
$$f(x,y)=\tan(x+y).$$

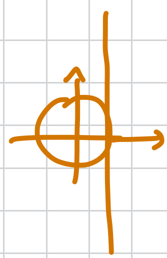
$D(f)=?$

gráfico do domínio?

solução: Lembrando do cálculo 1,

$$y=\tan x.$$





o domínio da tangente $y=\tan x$ é:

$x\in\mathbb{R}:\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ \forall k\in\mathbb{Z}.$

eixo das tangentes.

No nosso caso, então, devemos impor:

$$f(x,y) = \tan(x+y).$$

$$x+y \neq k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

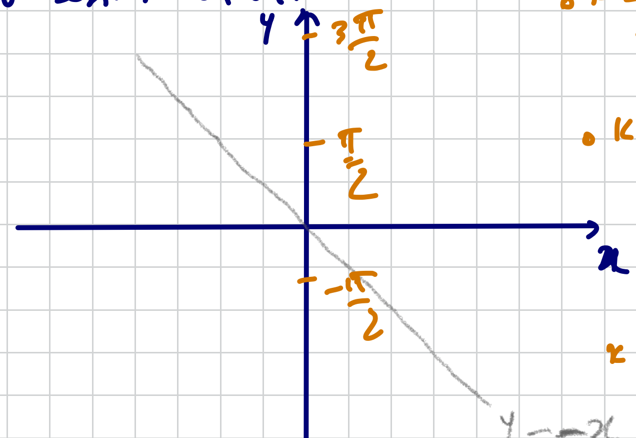
Assim, teremos:

$$D(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \forall\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

gráfico do domínio: note que devemos ter

$$y \neq \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - x$$ (retas paralelas à reta $y=-x$)

Assim, $D(f)$ será todo o plano xy, exceto estas retas.



• $k = 0$: $y = \frac{\pi}{2} - x$

• $k = 1$: $y = \pi + \frac{\pi}{2} - x$

$y = \frac{3\pi}{2} - x$

$k = -1$: $y = -\frac{\pi}{2} - x$

$y = -x$ (reta referência)

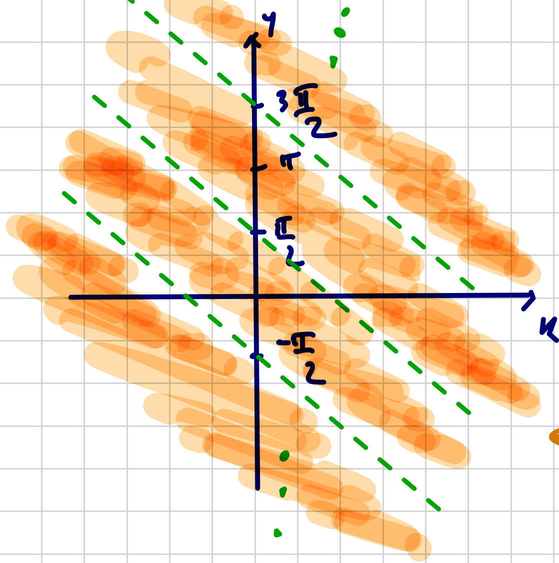
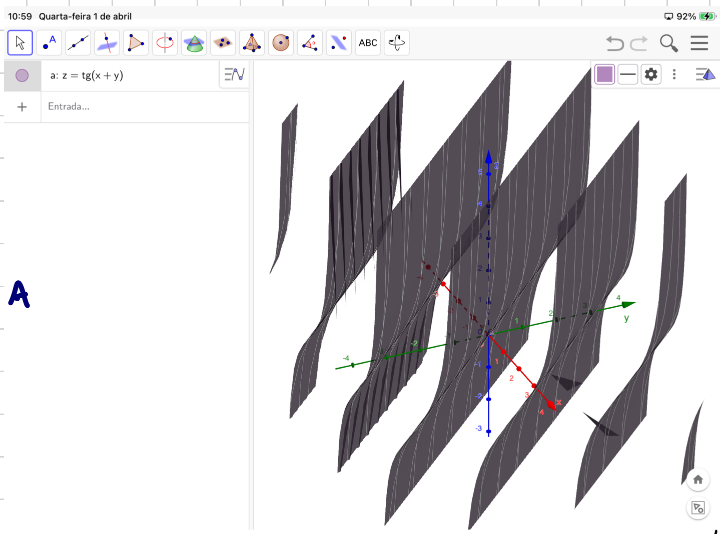


GRÁFICO DO DOMÍNIO

COMO CURIOSIDADE, AO LADO, PELO GEOGEBRA, A PLOTAGEM GRÁFICA DA FUNÇÃO $z = \tan(x+y)$



Algumas funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ permitem a construção gráfica algebricamente. São os casos quando resultam em superfícies já conhecidas como quádricas e cilindros.

Vejamos alguns exemplos.

Ex.: De cada função a seguir, determine:

(a) Domínio e o gráfico do domínio.

(b) Esboço gráfico da função e imagem.

01) $f(x,y) = x^2$.

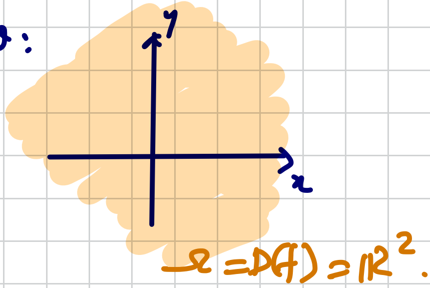
Solução:

(a) $z = f(x,y) = x^2$.

Como não há restrição para a variável x (e nem a y), segue que

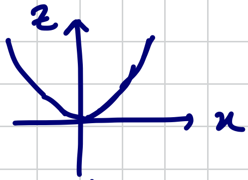
$D(f) = \mathbb{R}^2$.

gráfico do domínio:

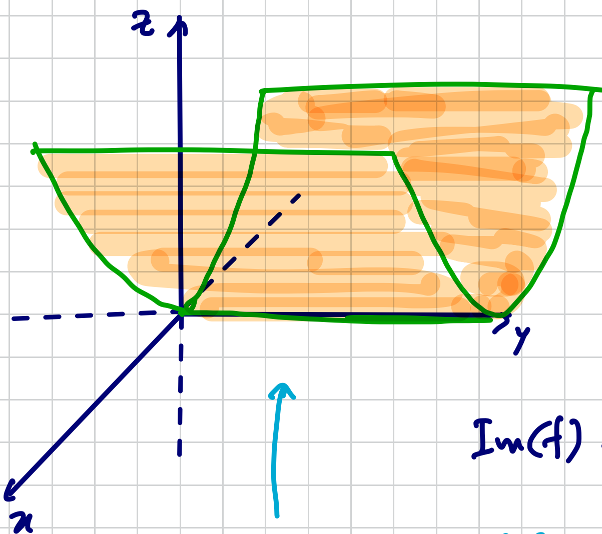


(b) $z = f(x,y) \Rightarrow z = x^2$

(parábola no plano xz)

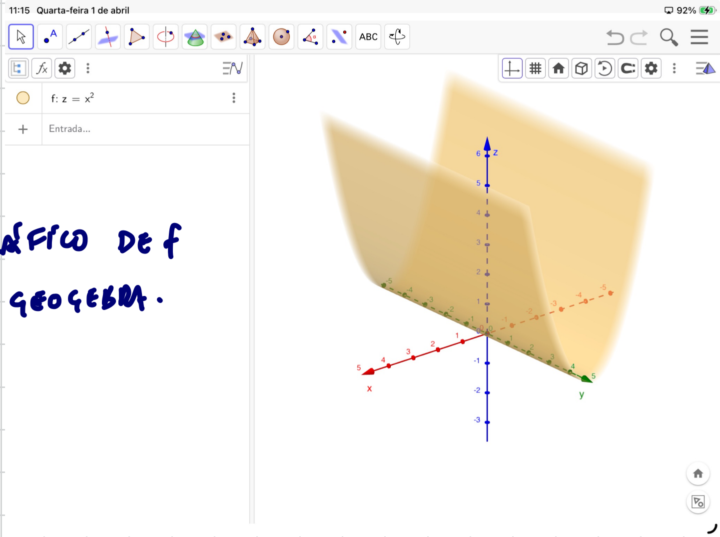


Como a variável y está ausente na função $f(x,y) = x^2$, ela é "livre". Então, "ganha profundidade" em y. Ou seja, teremos o gráfico:



$Im(f) = [0, +\infty)$

cilindro parabólico

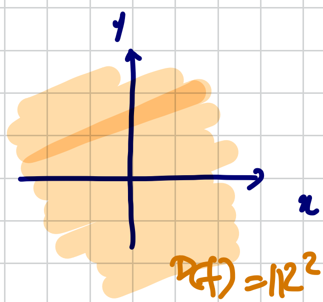


ESBOÇO GRÁFICO DE f FEITO PELO GEOGEBRA.

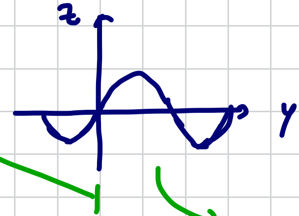
02) $f(x,y) = \text{sen } y$.

(a) Como $z = \text{sen } y$, não há restrição para a variável y (e nem a x), então, $D(f) = \mathbb{R}^2$.

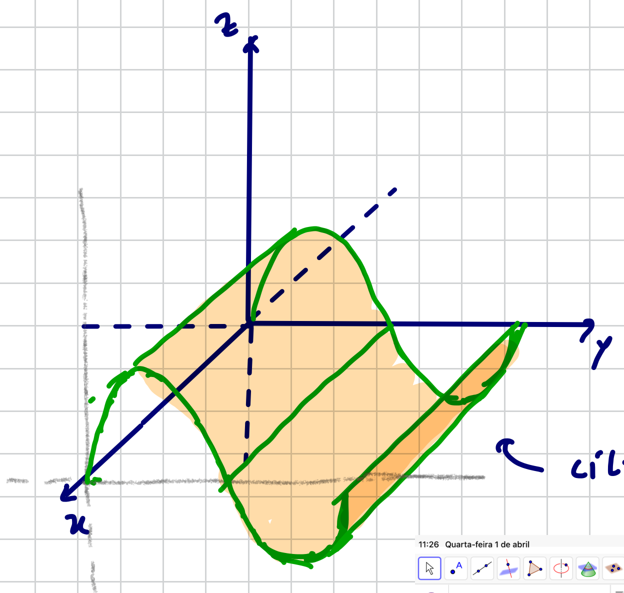
Gráfico do domínio:



(b) $z = \text{sen}\, y$ (no plano zy temos o gráfico da função seno)

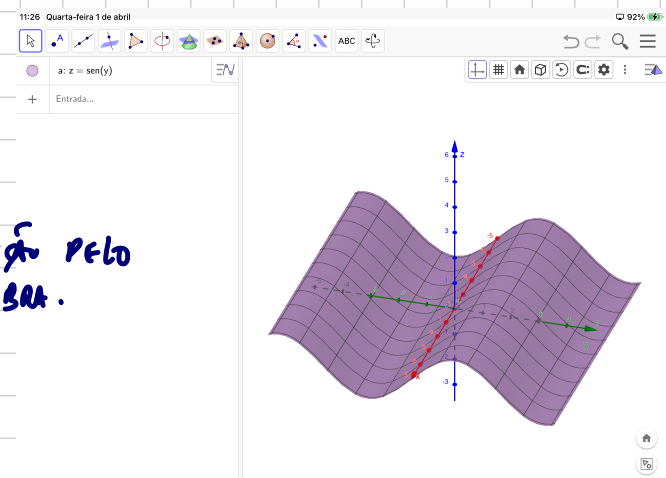


no $\mathbb{R}^3$, como a variável x está ausente, o gráfico ganha profundidade nessa dimensão, produzindo a superfície ao lado.



CILINDRO "SENOIDAL"

REPRESENTAÇÃO PELO GEOGEBRA.



03) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1 - x^2 - 9y^2}_{\geq 0}}$

(a) $D(f) = ?$

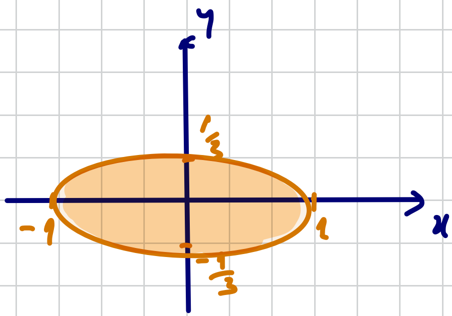
$$1 - x^2 - 9y^2 \geq 0 \iff x^2 + 9y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \leq 1\}.$$

Gráfico do domínio:
pensando na igualdade:

$$x^2 + 9y^2 = 1.$$

$$\iff \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1. \quad \text{(elipse)}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(b) esboço gráfico:

$$(z)^2 = f(x,y) = \left(\cancel{\sqrt{1 - x^2 - 9y^2}}\right)^2$$

Elevando ao quadrado vem:

$$z^2 = 1 - x^2 - 9y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \quad \text{(elipsoide)}$$

<u>MAS</u>, observe que, originalmente, tem-se $z = \underbrace{\sqrt{1-x^2-9y^2}}_{\geq 0}$

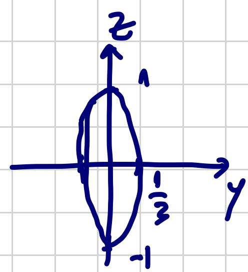
$z \geq 0$ (só acima do plano xy)

traços:

• $x=0$: (plano yz)

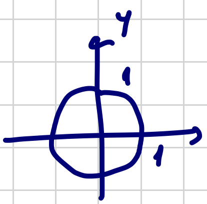
$$9y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{9}} + \frac{z^2}{1} = 1$$



• $y=0$: (plano xz):

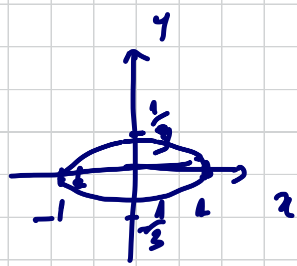
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(circunferência)}$$



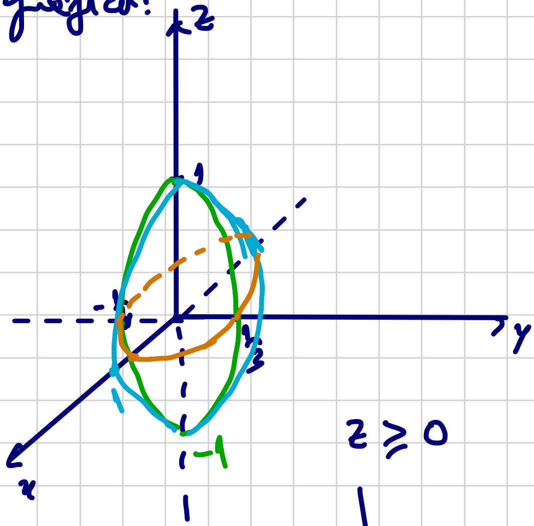
• $z=0$ (plano xy):

$$x^2 + 9y^2 = 1. \quad \text{(elipse)}$$

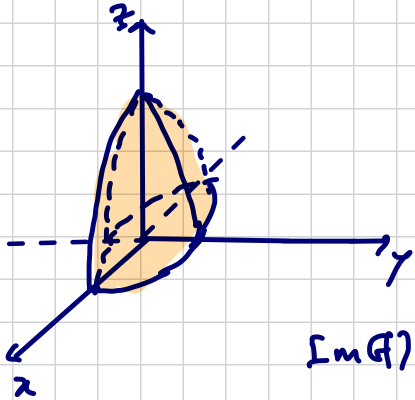
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$



Esboço gráfico:



$z \geq 0$



$Im(f) = [0, 1]$.