CÁLCULO 3, TURMA T2

29/04/26 - AULA 14

Na aula passada iniciamos o estudo de diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$. Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dizemos que f é diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$ se $\exists$ $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Neste caso, $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é denotada por

$$L = d_a f,$$

e é chamada de diferencial de f no ponto a; e $d_a f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possui uma representação matricial $[d_a f]_{n \times m}$ dada pela matriz jacobiana: sendo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, então

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}, \text{ onde}$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

Frente ao estudado até o momento, podemos finalmente provar o seguinte resultado:

<u>PROPOSIÇÃO:</u> Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma função diferenciável em $a \in int(\Omega)$, então f é contínua neste ponto.

<u>DEMONSTR.:</u> Sendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in int(\Omega)$, então $\exists\ L = d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{d_a f}_{L}(x-a) + \|x-a\| . r(x-a)$$

Tomando o limite com $x \to a$, vem,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} + \lim_{x\to a} L(x-a) + \lim_{x\to a} \|x-a\| . r(x-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \underbrace{L(0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{\|0\|\cdot r(0)}_{=0}$$

pois L é uma transformação linear.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

ou seja, f é contínua no ponto a. $\square$

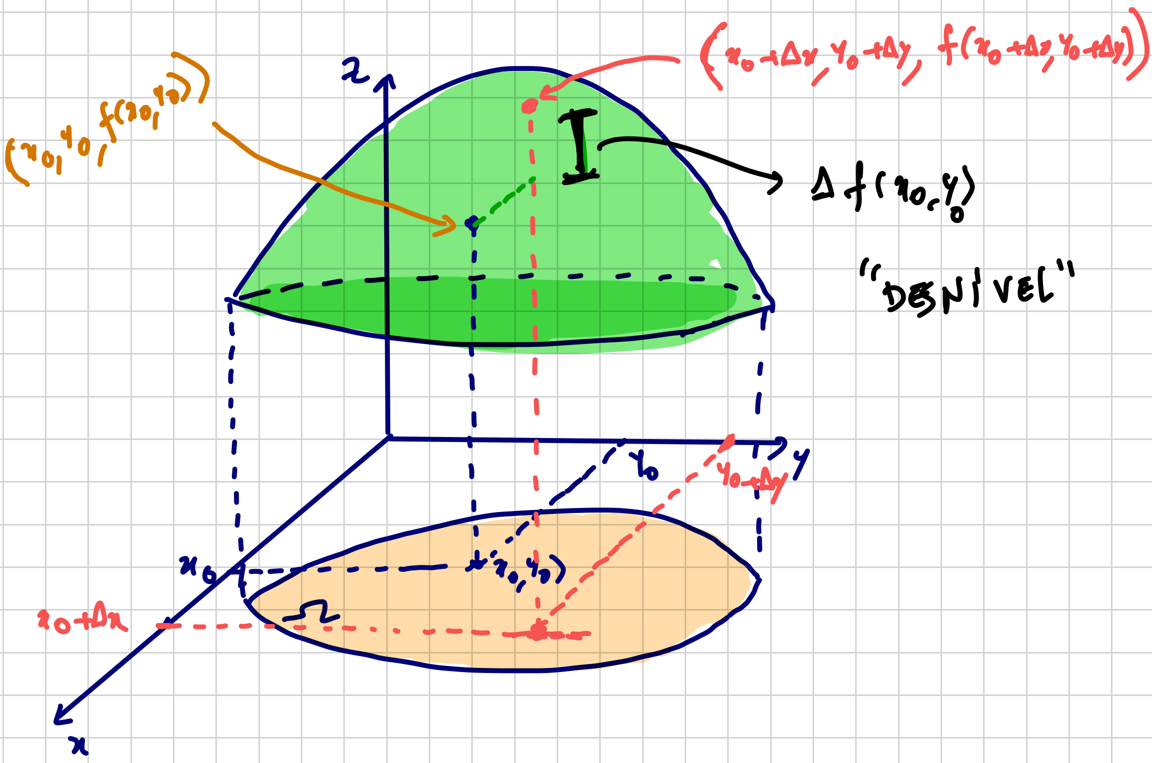
INCREMENTO DE UMA FUNÇÃO

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função e $a \in \operatorname{int}(\Omega)$. Definimos o incremento de f no ponto a, e escrevemos $\Delta f(a)$, como: para $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a+h \in \operatorname{int}(\Omega)$, então

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a).$$

Quando $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou seja, uma função escalar a duas variáveis reais), podemos apresentar uma interpretação geométrica para o incremento $\Delta f(a)$ como segue: escreve $a(x_0, y_0)$ e tome $h = (\Delta x, \Delta y)$. Assim:

$$a + h = (x_0, y_0) + (\Delta x, \Delta y) = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y).$$



Frente a este conceito, podemos redefinir o conceito de diferencial para funções escalares como segue:

__Def.__ Dizemos que uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$ se o incremento $\Delta f(a)$ puder ser escrito como, pondo $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, então

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot h_3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot h_n + \varepsilon_1 \cdot h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \cdots \varepsilon_n \cdot h_n;$$

onde $\varepsilon_i \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

__obs.__ Esta definição de diferenciabilidade via incremento é equivalente (para funções escalares) ao conceito de diferenciabilidade tratado na aula passada. De fato, e para simplificar a escrita, considere $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então, da definição "antiga", f é diferenciável em $a \in int(\Omega)$, se $\exists$ $L = d_a f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

Escrevendo $x - a = h$, então $x = a + h$, e disso:

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \cdot r(h)$$

$$\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\Delta f(a)} = d_a f(h) + \|h\| \cdot r(h)$$

Note que $f(a+h) - f(a) = \Delta f(a)$;

e como $d_a f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sua representação matricial, será $[d_a f]_{1\times 2} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y} \right]$;

$$h = (\Delta x, \Delta y) = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

$$\|h\| = |\Delta x| + |\Delta y| = \Delta x + \Delta y,$$

usamos a métrica d_1 $\qquad \Delta x, \Delta y > 0$

então, vamos encontrar:

$$\Delta f(a) = (d_a f).(h) + \|h\|.\eta(h)$$

$$\Delta f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + (\Delta x + \Delta y).\eta(h)$$

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y + \underbrace{\eta(h)}_{=\varepsilon_1}.\Delta x + \underbrace{\eta(h)}_{=\varepsilon_2}\Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 . \Delta y \, ;$$

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

PROP.: Uma função escalar $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é diferenciável se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ forem contínuas, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada, por exemplo no livro do LEITHOLD, vol 2.

Def.: O *diferencial total* de uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ em um ponto $a \in int(\Omega)$, é definido por:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a).h_m$$

Note que $df(a) \approx \Delta f(a)$, pois

$$\Delta f(a) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a).h_m}_{df(a)} + \underbrace{\varepsilon_1.h_1 + \dots + \varepsilon_m h_m}_{\text{"RESTO"}}$$

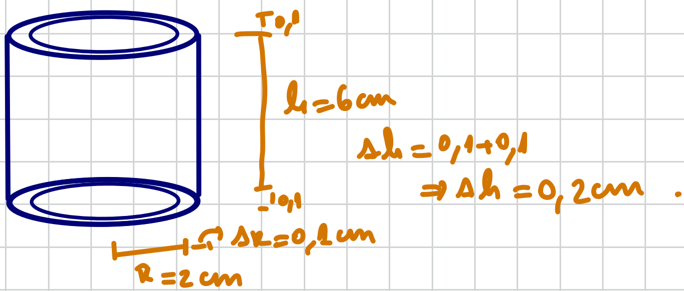
Como no cálculo 1, para as variáveis independentes tem-se $\Delta x_1 = dx_1$; $\Delta x_2 = dx_2$; $\dots$ $\Delta x_m = dx_m$;

e então o diferencial total de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ em $a \in int(\Omega)$ é dado por:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a).dx_m$$

EXEMPLO: Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do material a ser usado é de R$ 10,00 por cm³, ache por diferenciais o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.

SOLUÇÃO:



O volume V de um cilindro é dado por:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi R^2 \cdot h.$$

O diferencial total do volume será:

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h \, ;$$

onde:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2$$

Assim:

$$\Delta V \approx 2\pi R h \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h$$

$$\Rightarrow \Delta V \Big|_{\substack{R=2cm,\ \Delta R=0,1cm \\ h=6cm;\ \Delta h=0,2cm}} \approx 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0,1 + \pi \cdot (2)^2 \cdot 0,2$$

$$\Delta V \approx 24\pi \cdot \frac{1}{10} + 4\pi \cdot \frac{2}{10} =$$

$$= \frac{12\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{16\pi}{5} \text{ cm}^3$$

CUSTO = R$ 10,00 por cm³

CUSTO TOTAL para uma peça será:

CUSTO TOTAL = $10 \times \frac{16\pi}{5} = 32\pi$ reais.

TEOREMA: (REGRA DA CADEIA) Sejam $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$; $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável em $b = f(a)$. Então $g \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em a, com

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \,.\, f'(a).$$

PRODUTO MATRICIAL

Em notação de diferenciais:

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}\, g \,.\, d_a f$$

A demonstração desse resultado transcende um curso de Cálculo, e por esta razão, fica omitida.

Na próxima aula faremos um exemplo e apresentaremos o resultado para funções escalares. (i.e., para funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$)