CÁLCULO 3 - TURMA 2

22/04/26 - AULA 12

AULA DE EXERCÍCIOS:

L3:

4. Prove que o limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

existe.

Vamos mostrar que $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x,y,z) \in D(f)$ tal que

$0 < d_2((x,y,z),(0,0,0)) < \delta$, ou seja,

$0 < x^2 + y^2 + z^2 < \delta$, implica em

$d(f(x,y,z), 0) < \varepsilon$.

Avaliando $d(f(x,y,z), 0)$:

$$d(f(x,y,z),0) = |f(x,y,z)-0| = |f(x,y,z)|.$$

$$|f(x,y,z)| = \left| \frac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| =$$

$$= \frac{|xy+xz+yz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{|x|.|y|+|x|.|z|+|y|.|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{|x|.(|y|+|z|)+|y|.|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Note que:

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|z| = \sqrt{z^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$ Assim,

obtemos:

$$|f(x,y,z)-0| \leq \frac{|x|.(|y|+|z|)+|y|.|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(|y|+|z|) + |y| \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= |y| + |z| + |y| =$$

$$= 2|y| + |z| \leq 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

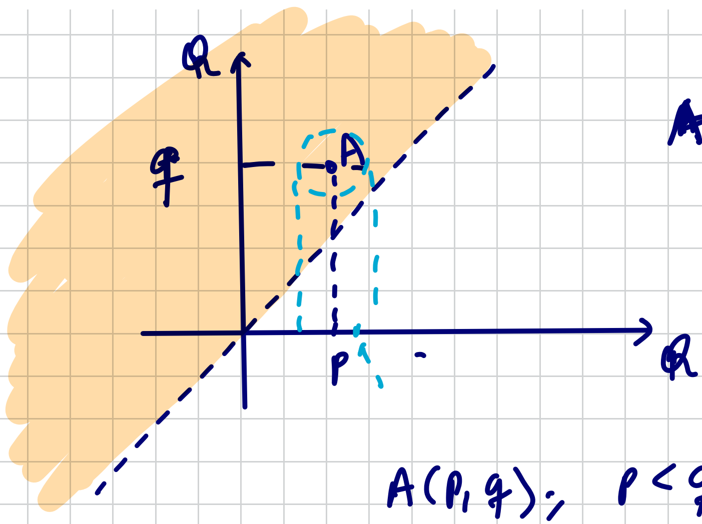
$$= 3\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{<\delta} < 3\delta =: \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}}$

L1

$y > x$.

10. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.



$A(p,q)$; $p, q \in \mathbb{Q}$; $p < q$

$A \in \varphi$

$A(p,q)$; $p < q$ um ponto qualquer sobre o conj. dado.

$\forall \delta > 0$, $B_\delta(A) \not\subset \mathbb{Q}^2$ (pela densidade dos irracionais).

pois não existem em $\mathbb{R}^2$ pontos com alguma coordenada irracional dentro da $B_\delta(A)$, $\forall \delta > 0$, devido à densidade dos irracionais.

Logo $A \notin \text{int}(\mathbb{Q}^2)$, e pela arbitrariedade da escolha do ponto A, segue que $\text{int}(\mathbb{Q}^2) = \emptyset$.

L4:

$$x^3y - xy^3$$

11. Dada a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x$.

Extra: verifique também se esta função é contínua na origem.

solução: Para $y \neq 0$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \left(\frac{(x^2+y^2).(3x^2y-y^3) - (x^3y-xy^3).2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{(0,y)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$= \left(\frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{(0,y)}$$

$$= \frac{-y^5}{y^4} = -y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \quad (\text{para } y \neq 0)$$

Resta mostrar para $y=0$; ou seja, resta mostrar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -y.$$

Mas, como a f muda de sentença exatamente na origem $(0,0)$, o cálculo da derivada parcial <u>DEVE</u> ser feito pela definição.

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\overbrace{h.0}^{=0}(h^2-0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{0}_{y},0) = 0 = \underbrace{-0}_{-y}$$

Logo, realmente, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y, \ \forall y \in \mathbb{R}.$

O mesmo raciocínio para concluir que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

EXTRA: Verificar se f é contínua em $(0,0)$.

Para isto, precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

AF-1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Note que:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{|xy| \cdot |x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x| \cdot |y| \cdot (|x|^2+|y|^2)}{x^2+y^2}$$

$|a-b| \leq |a|+|b|$

Como $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$; então:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{\overbrace{|x|}^{\leq \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \overbrace{|y|}^{\leq \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(|x|^2+|y|^2\right)}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(|x|^2+|y|^2\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)} \cdot \left(|x|^2+|y|^2\right)}{\cancel{x^2+y^2}} = |x|^2+|y|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|x|^2+|y|^2}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0}$$

$\Downarrow$ T. do Sanduíche

$$|f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$\Rightarrow f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Conclusão:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Ou seja, f é contínua na origem.

14.

15. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $P(2, 1, 5)$. Faça um esboço e interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

A interseção da superfície $z = x^2+y^2$ com o plano $y=1$. (mantém y constante)

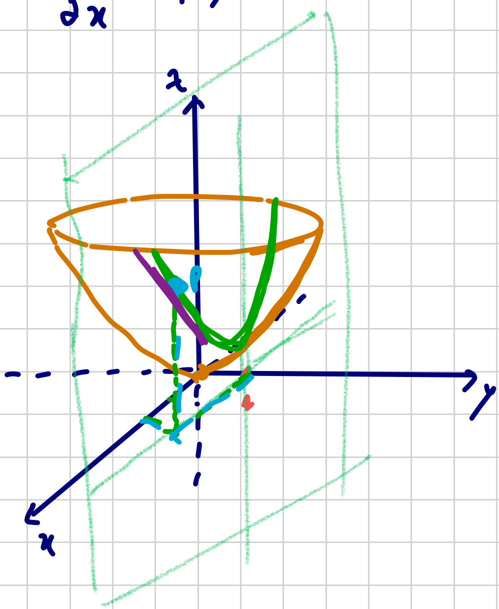
A inclinação será dada por

$$\boxed{\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ &= x^2+y^2 \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x.$$

obs.: $P(2, 1, 5) \longrightarrow f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$

A inclinação da reta tangente ao intercepto do plano $y = 1$ no ponto $P(2, 1, 5)$ será $m = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2 \cdot 2 = 4.$



$z = x^2 + y^2$

L4

12. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de cada função abaixo.

(a) $f(x,y) = e^{x^2-3xy}\tan\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\ln\dfrac{x^2}{y}$

(c) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x-y}{x+y}$ (d) $f(x,y) = \ln(x^2+\sqrt{x-2y})$

(e) $f(x,y,z) = xyz + xy\cos yz + e^{\sqrt{x^2y-z^3}}$ (f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(c) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x-y}{x+y}$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)'}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} = \frac{\frac{(x+y).1-(x-y).1}{(x+y)^2}}{1+\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{x}+y\ \cancel{-x}+y}{\cancel{(x+y)^2}}}{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{\cancel{(x+y)^2}}} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2}$$

$$= \frac{2y}{x^2+\cancel{2xy}+y^2+x^2-\cancel{2xy}+y^2} = \frac{2y}{2x^2+2y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{---} \quad \text{idem ---}$$

L4:

ATENÇÃO!

9. Calcule, de acordo com a definição, as derivadas parciais de cada função a seguir.

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3$ (b) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$ (c) ~~$f(x,y)$~~ $= \ln(x^2y^2 - 3xy)$

USA O 2º LIMITE NOTÁVEL, NÃO SERÁ COBRADO.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.(x+h)^2 - 4(x+h).y + 3 - (3x^2 - 4xy + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.(x^2 + 2xh + h^2) - 4xy - 4hy + 3 - 3x^2 + 4xy - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 \cancel{-4xy} - 4hy \cancel{+3} \cancel{-3x^2} \cancel{+4xy} \cancel{-3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 4hy}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6x + 3h - 4y)}{\cancel{h}}$$

$$= 6x - 4y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y$$

O mesmo se faz para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - 4x(y+h) - 3 - (3x^2 - 4xy - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} - \cancel{4xy} - 4xh - \cancel{3} - \cancel{3x^2} + \cancel{4xy} + \cancel{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4x\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -4x}$$