CÁLCULO 3, TURMA T2

15/04/26 – AULA 10

Na aula passada iniciamos o estudo de derivadas. Vimos o conceito de derivada de uma função vetorial a uma variável real, e vimos o conceito de derivação parcial de uma função a várias variáveis reais.

Vejamos mais um exemplo:

<u>Ex</u>: $w = f(x, y, z)$, dada por

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2y^3) + y^2 z .$$

Obter $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$.

<u>Solução</u>:

$(\operatorname{sen} r)' = \cos r \cdot r'$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x^2y^3) + y^2 z\right) =$$

$$= \cos(x^2y^3) \cdot (2x \cdot y^3) + 0 = 2xy^3 \cdot \cos(x^2y^3)$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x^2y^3) + y^2 z\right) =$$

$$= \cos(x^2y^3).(3x^2y^2) + 2yz$$

$$= 2yz + 3x^2y^2.\cos(x^2y^3)$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\underbrace{\operatorname{sen}(x^2y^3)}_{\text{CONSTANTE PARA A VARIÁVEL } z} + y^2z\right) = 0 + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = y^2.$$

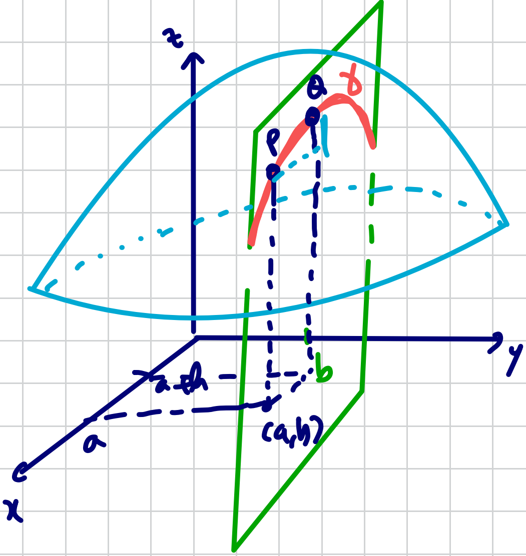
SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA DERIVADA PARCIAL:

Se a função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podemos apresentar um significado geométrico para $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$, onde $P(a,b) \in \operatorname{int} \Omega$.

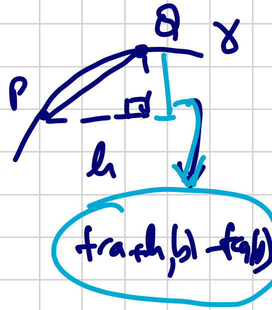
Vamos considerar primeiro para $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$.

Considere o plano $y = b$ (constante), um plano paralelo ao plano xz.

$\gamma = (\text{gráfico de } f) \cap (\text{plano } y = k)$



$P(a, b, f(a,b))$



Tome $h \in \mathbb{R}$ tal que, $(a+h, b) \in \Omega$.

Assim, determinamos o ponto $Q(a+h, b, f(a+h,b))$

Podemos, assim, determinar a reta secante à curva γ passando pelos pontos P e Q.

Fazendo $h \to 0$, o ponto Q se aproxima do ponto P e a reta secante tende a uma reta tangente à γ no ponto P. Ou seja;

$$\text{tangente à } \gamma \text{ em } P = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ é a inclinação da reta tangente à curva γ obtida pelo intercepto do gráfico de f com $y = \text{constante}$ $(y=b)$.

Do mesmo modo, tem-se o significado geométrico para $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Def.: Seja $w = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais; definimos as derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \; ;$$

se os respectivos limites existirem.

Vejamos um exemplo.

Ex.: Dada $f(x,y) = x^2 + \cos(xy)$.

Calcule as derivadas parciais segundas.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + (-\operatorname{sen}(xy) \cdot y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \cdot \operatorname{sen}(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \cos(xy)\right) =$$

$$= 0 - \operatorname{sen}(xy) \cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cdot \operatorname{sen}(xy)}$$

Assim, temos:

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y \cdot \operatorname{sen}(xy)\right)$$

$$= 2 - y \cdot \cos(xy) \cdot y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - y^2 \cdot \cos(xy)}$$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-x.\operatorname{sen}(xy)\right) =$

$= -x.\cos(xy).x \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{-x}_{u}.\underbrace{\operatorname{sen}(xy)}_{v}\right)$

$(u.v)' = u.v' + u'.v$

$= -x.\cos(xy).y + (-1).\operatorname{sen}(xy)$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -xy\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2x - \underbrace{y}_{u}.\underbrace{\operatorname{sen}(xy)}_{v}\right)$

$= 0 + (-y).\cos(xy).x + (-1).\operatorname{sen}(xy)$

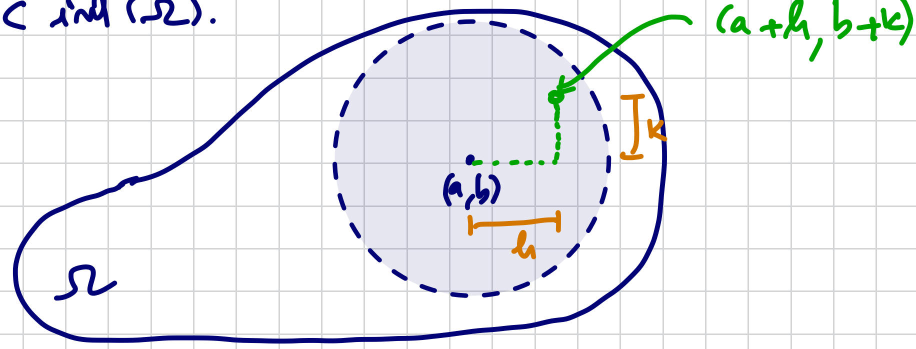
$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -xy.\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}$

Note no exemplo acima que as derivadas mistas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ resultaram iguais. E isso não é uma simples coincidência. Vale o seguinte resultado:

TEOREMA DE SCHWARZ: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ contínuas em uma vizinhança de um ponto $(a,b) \in \text{int}\,\Omega$. Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função nas hipóteses do teorema. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a,b) \subset \text{int}(\Omega)$.



Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in B_\delta(a,b)$.

Define a função $g : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Note que g é cont e derivável, pois f o é.
Então, estamos nas hipóteses do T.V.M.$^{(*)}$
Disso, segue que $\exists\, c_0$ entre a e $a+h$ tal que

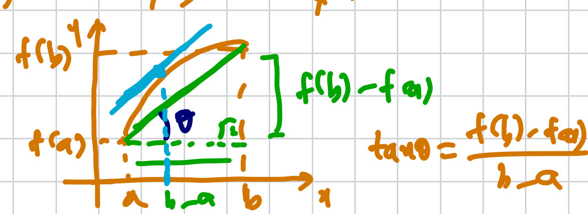
$$g'(c_0) = \frac{g(a+h) - g(a)}{\cancel{a} + h - \cancel{a}}$$

$$\Rightarrow g(a+h) - g(a) = g'(c_0) \cdot h.$$

Como $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$, então
$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$. Logo:

(*) <u>T.V.M.</u>: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, $\exists\, c \in [a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$g'(c_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b).$$

Com isso, obtemos a igualdade:

$$\boxed{g(a+h) - g(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b)\right) . h.} \quad (*)$$

Define $u(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, y)$, onde $y \in [b, b+k]$. Como u é cont. e derivável pelo T.V.M, segue que $\exists\ d_0$ entre b e $b+k$ tal que

$$u(b+k) - u(b) = u'(d_0) . (\cancel{b} + k \cancel{- b})$$

$$\Rightarrow u(b+k) - u(b) = u'(d_0) . k, \quad \text{onde}$$

$$u(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, y) \Rightarrow u'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, y)\right)$$

$$\Rightarrow u'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, y)$$

$$\Rightarrow u'(d_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0)$$

Ou seja, obtemos:

$$u(b+k) - u(b) = u'(d_0) . k$$

$$\Rightarrow u(b+k) - u(b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0) . k . \qquad (**)$$

Levando esta última igualdade para $(*)$, obtemos:

$$g(a+h) - g(a) = \Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k)}_{u(b+k)} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b)}_{u(b)} \Bigg) . h =$$

$$= \big(u(b+k) - u(b) \big) . h \underset{\text{por } (**)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0) . k . h$$

$$g(a+h) - g(a) = k . h . \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0)$$

Como:

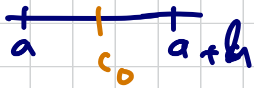
$$g(a+h) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) \quad e$$

$$g(a) = f(a, b+k) - f(a, b) \text{ , então:}$$

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= k \cdot h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0)$$

Como c_0 está entre a e $a+h$



, então,

$\exists\, \theta_1 \in [0,1]$ tal que

$$c_0 = a + \theta_1 \cdot h$$

Do mesmo modo, como d_0 está entre b e $b+k$, então $\exists\, \theta_2 \in [0,1]$ tal que

$$d_0 = b + \theta_2 k.$$

Assim, obtemos:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= k \cdot h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 \cdot h,\ b + \theta_2 \cdot k)$$

Dividindo por $k \neq 0$, obtemos:

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=$$

$$= h\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a+\theta_1 h,\ b+\theta_2 k)$$

Tomando o limite com $k\to 0$, obtemos:

$$\underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}}_{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)}-\underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}_{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}=$$

$$=\lim_{k\to 0} h\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a+\theta_1 h,\ b+\underbrace{\theta_2 k}_{0})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=h\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a+\theta_1 h,b)$$

Dividindo por $h\neq 0$ e passando o limite com $h\to 0$, vamos obter:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a,b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$\square$

obs.: Outras notações para derivadas parciais

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f = f_1$

derivada na 1ª variável.

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f = f_2$

derivada em relação à segunda variável

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$.

LISTA 04:

18. Definimos o *laplaciano* de uma função $f(x, y)$ por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que uma função f à várias variáveis é *harmônica* se $\Delta f = 0$. Verifique se as funções a seguir são harmônicas.

(a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$
(c) $f(x, y) = e^{x+y} \cos(x - y)$ (d) $f(x, y) = (x + y) \ln(x + y)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

f é harmônica se $\Delta f = 0$.

(a) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2} = \ln (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2+y^2)$$

PROPRIEDADE DOS LOGARITMOS: $\log_b a^m = m \log_b a$

Assim, temos:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2).1 - x.(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Do mesmo modo, mostra-se que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \qquad \text{(exercício)}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{y^2}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Logo, a f dada é harmônica.