

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Eng. de Materiais, Eng. Hídrica e Eng. da Computação
Primeira Prova de Cálculo 3 - Turma T3
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome:

Data: 24/04/2026

Questão 01. [1,0 pt] Desenhe o conjunto X dado por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d_2((x, y, z); (1, 1, 0)) \geq 4\}.$$

Este conjunto é um compacto do \mathbb{R}^3 ? Justifique.

Questão 02. Esboce o gráfico de cada função a seguir:

(a) [1,0 pt] $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (t + 1, 1, t^2)$.

(b) [1,0 pt] $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2$.

Questão 03 Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

(a) [1,0 pt] Determine o domínio Ω e a imagem de f . Em seguida, esboce o gráfico de f .

(b) [0,5 pt] Mostre que o gráfico de $\vec{g}(t) = (\cos t, 2 \sin t, 1)$ está sobre a superfície $z = f(x, y)$.

(c) [1,0 pt] Encontre o vetor tangente unitário ao gráfico de \vec{g} no ponto $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 1)$.

Questão 04. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{\sqrt{x-y}} - 2 \ln(1 - xy)$.

(a) [1,0 pt] Obtenha o domínio Ω e o esboço gráfico do domínio.

(b) [1,0 pt] Marque o ponto $A(1, 1)$ no esboço do item (a). Perguntamos: o ponto A pertence ao interior de Ω ? Pertence ao seu fecho? Justifique.

(c) [0,5 pt] Conclua se conjunto Ω é um conjunto aberto, fechado ou nem aberto e nem fechado, justificando. Seria um compacto do \mathbb{R}^2 ? Explique.

(d) [1,0 pt] Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Questão 05. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) [1,0 pt] Calcule as derivadas parciais na origem.

(b) [1,0 pt] Verifique se f é contínua na origem.

Questão 06. [1,0 pt] Mostre que o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ não existe.

Questão 07. Seja a função vetorial $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{t^2 - t}{3t - 3}, \frac{\sqrt{t} - 1}{t^2 - 1}, \ln(3t - 2) \right).$$

(a) [0,5 pt] Encontre o domínio Ω de \vec{f} .

(b) [1,0 pt] Calcule $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t)$.

Questão 08. [1,5 pt] Calcule as derivadas parciais da função

$$f(x, y, z) = \cos(x^2y - y^2z) + z^2$$

