ATENDIMENTO T2 e T3 11/04/26.

↳ Feito pelo google Meet.

LISTA 01:

3. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, temos que:

(i) $d(x,y) \geq 0$?

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq 0.$$

Além disso, $d(x,y) = 0 \iff$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \iff \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$$

$$\iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \iff x = y.$$

(ii) ¿ $d(x,y) = d(y,x)$?

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = d(y,x)$$

(iii) $¿\, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\, ?$

$$\underbrace{d(x,y)} = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}} + \underbrace{\frac{1}{z} - \frac{1}{y}} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| =$$

$$= \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}.$$

2. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que (M, d_1) e (M, d_∞) são espaços métricos, onde, para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$,

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{e} \quad \underline{d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}}.$$

Em seguida, defina e desenhe as bolas abertas de centro em $(0,0)$ e raio unitário em (M, d_1) e (M, d_∞).

Obs. Nunca mais ria do Quico do episódio do Chaves quando ele queria uma "bola quadrada" - ele só estava lidando com outra métrica diferente da euclidiana...

Faremos para d_∞.

$(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \end{array}}$$

(i) $d_\infty(x,y) \geq 0\, ?$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\underbrace{|x_1 - y_1|}_{\geq 0} ; \underbrace{|x_2 - y_2|}_{\geq 0}\} \geq 0$$

Além disso,

$d_\infty(x,y) = 0 \iff$

$\max\{|x_1 - y_1| ; |x_2 - y_2|\} = 0$

$\iff |x_1 - y_1| = 0$ e $|x_2 - y_2| = 0$

$\iff \underline{x_1} = \underline{y_1}$ e $x_2 = y_2$

$\iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

$\iff x = y.$

(ii) $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$?

$\underset{\sim\sim\sim}{d_\infty(x,y)} = \text{máx.}\{|x_1 - y_1| ; |x_2 - y_2|\} =$

$= \text{máx.}\{|y_1 - x_1| ; |y_2 - x_2|\}$

$= \underset{\sim\sim\sim}{d_\infty(y,x)}.$

(iii) $d_\infty(x,y) \le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$?

$$d_\infty(x,y) = \max.\{|x_1-y_1|;\ |x_2-y_2|\}$$

$$= \max.\{\underbrace{|x_1-z_1+z_1-y_1|}_{\le |x_1-z_1|+|z_1-y_1|};\ \underbrace{|x_2-z_2+z_2-y_2|}_{\le |x_2-z_2|+|z_2-y_2|}\}$$

$$\le \max.\{|x_1-z_1|+|z_1-y_1|;\ |x_2-z_2|+|z_2-y_2|\}$$

Note que, como ;

$|x_1-z_1| \le d_\infty(x,z)$; $|z_1-y_1| \le d_\infty(y,z)$

$|x_2-z_2| \le d_\infty(x,z)$, $|z_2-y_2| \le d_\infty(y,z)$

então :

$$d(x,y) \le \max\{\underbrace{|x_1-z_1|}_{\le d_\infty(x,z)} + \underbrace{|z_1-y_1|}_{\le d_\infty(z,y)} \,;\, \underbrace{|x_2-z_2|}_{\le d_\infty(x,z)} + \underbrace{|z_2-y_2|}_{\le d_\infty(y,z)}\}$$

$$\le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y).$$

Logo, d_∞ é uma métrica.

Vamos determinar $B_1(0,0)$ com d_∞.

$$B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y);(0,0)) < 1\};$$

onde: $\max\{|x-0|\,;\,|y-0|\} < 1.$

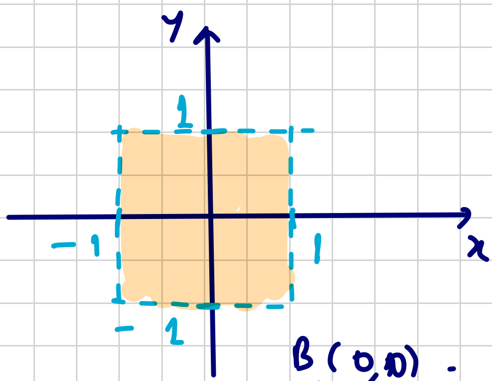
$$\max\{|x|\,;\,|y|\} < 1.$$

$|x| < 1$

$|y| < 1.$

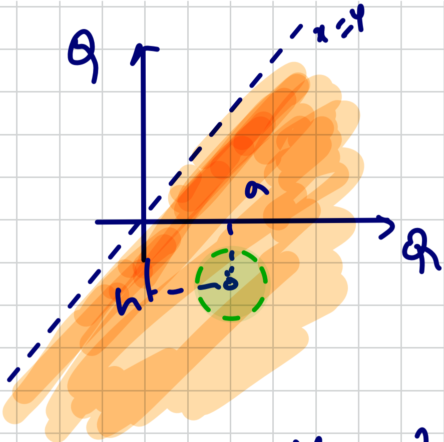
$-1 < x < 1$

$-1 < y < 1$



$B_1(0,0)$.

10. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.



Seja (a,b); $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (a,b) \in \mathbb{Q}^2$;

e tal que $a < b$.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$.

$\text{int} \cdot X = ?$

$\forall\, \delta > 0$, seja $B_\delta(a,b)$.

Como $\mathbb{I}$ é denso em $\mathbb{R}$ (e $\mathbb{Q}$ também)

segue que $B_\delta(a,b) \not\subset X$. (pois sempre haverá pontos com alguma coordenada irracional; e isso vale, $\forall\, (a,b) \in X$.

Então, concluímos que

$\text{int}(X) = \emptyset$ em $\mathbb{R}^2$.

15. Faça o desenho de cada região do $\mathbb{R}^2$ abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$. Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do $\mathbb{R}^2$.

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$

(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$

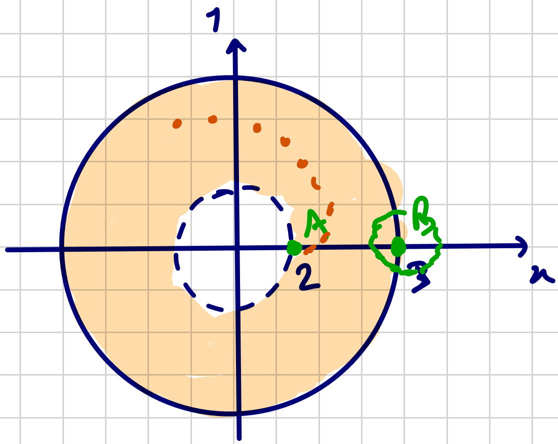
(c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy < 1\}$

(d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$

região externa de circunf. de raio 2.

(a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$

REGIÃO INTERNA CIRCUNF. DE RAIO 3 (MAIS A "CASCA")

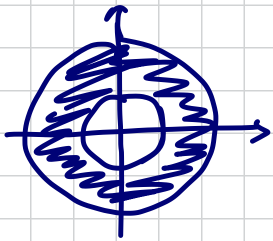


X não é nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$, pois, por exemplo: $A(2,0) \notin X$, mas pertence ao seu fecho, pois podemos construir uma seq. de pontos $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to A$.

Logo, X não é fechado.

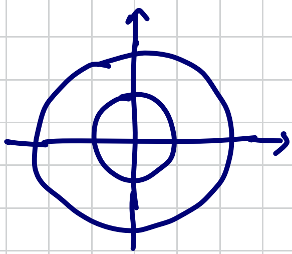
Por outro lado, X também não é aberto, pois $B(3,0) \in X$, mas, $\forall \delta > 0$, $B_\delta(B) \not\subset X$.

$\overline{X}$ (fecho de X)?



$\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$

$\partial X = ?$



$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 9\}$.

X não é compacto pois não é fechado.

(b) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(1,0)) < 1\}$.

$$|x-1| + |y-0| < 1.$$

$$|x-1| + |y| < 1.$$

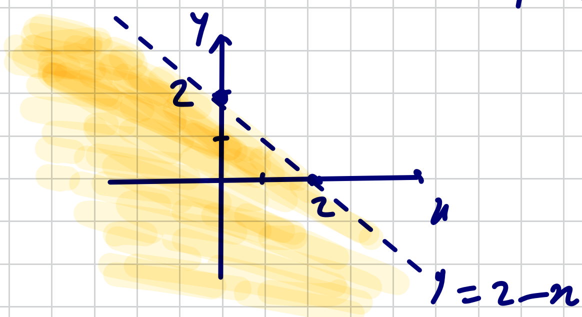
CASOS:

- $x-1 \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$|x-1| + |y| = x - 1 + y < 1.$$

$$x + y < 2$$

$$y < 2 - x$$



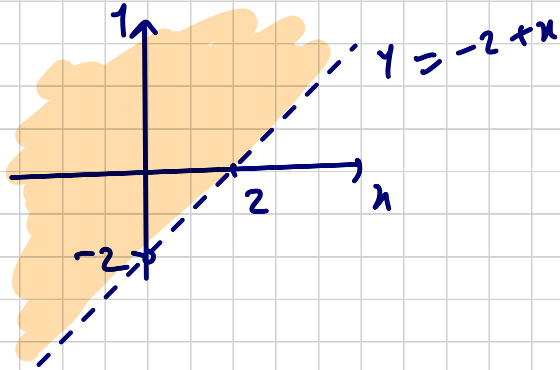
- $x-1 \geq 0$ e $y < 0$:

$$|x-1| + |y| = x - 1 - y < 1.$$

$$x - y < 2$$

$$-y < 2 - x \quad (\times -1)$$

$$y > -2 + x$$

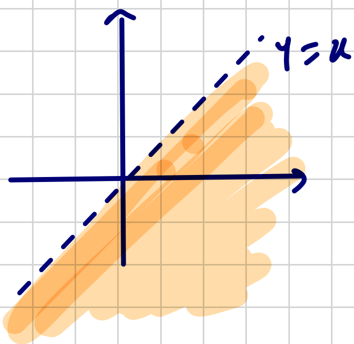


• $x-1<0$ e $y\geq 0$:

$$|x-1|+|y| = -(x-1)+y < 1.$$

$$-x+\cancel{1}+y<\cancel{1}$$

$$y<x$$



• $x-1<0$ e $y<0$:

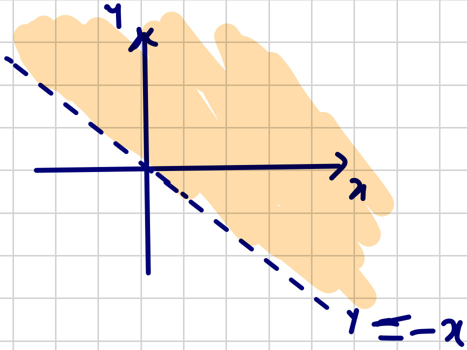
$$|x-1|+|y| = -(x-1)-y < 1.$$

$$-x+\cancel{1}-y<\cancel{1}$$

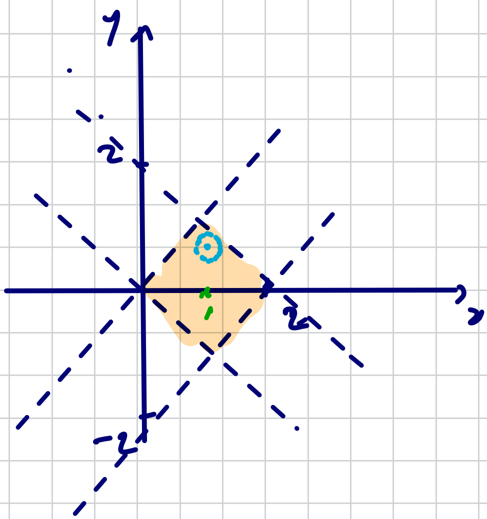
$$-x-y<0$$

$-y < x \quad (-1)$

$y > -x$



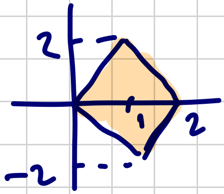
Tomando as interseções, obtemos:



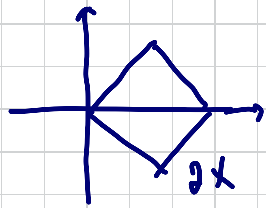
X é aberto do $\mathbb{R}^2$ pois $\forall A \in \text{int} X$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta(A) \subset X$.

$\overline{X} = ?$ (fecho)

$\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x,y);(1,0)) \leq 1\}$



$$\partial X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(1,0)) = 1\}$$



X não é compacto, pois não é fechado.

---

7. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

   (a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

   (b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.

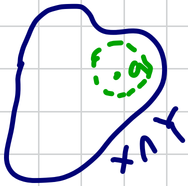
(a) (igualdade entre conjuntos)

Para provar uma igualdade entre dois conjuntos, precisamos provar duas contenções:

AFO1: $\text{int}(X \cap Y) \subset \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$:

Dado $a \in \text{int}(X \cap Y)$.

Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset X \cap Y$.



Logo; $B_\delta(a) \subset X$ e $B_\delta(a) \subset Y$.

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$a \in \text{int}(X)$ $\qquad$ $a \in \text{int}(Y)$

$$\Downarrow$$

$$a \in \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$$

Ou seja, vale a AF01.

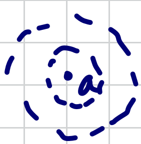
AF02: $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cap Y)$:

Dado $a \in \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$

Então, $a \in \text{int}(X)$ e $a \in \text{int}(Y)$

Logo, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(a) \subset X$; e

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(a) \subset Y$.



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $B_\delta(a) \subset X$ e $B_\delta(a) \subset Y$.

Logo, $B_\delta(a) \subset X \cap Y$, ou seja;

$a \in \text{int}(X \cap Y)$.

Isso prova a AFO2

Pelas afirmações 1 e 2 segue a igualdade desejada.

(b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$:

Dado $a \in \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.

Mostrar: $a \in \text{int}(X \cup Y)$.

Então, $a \in \text{int}\, X$ ou $a \in \text{int}\, Y$.

- se $a \in \text{int}\, X$. Então, $\exists\ \delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset X \subset X \cup Y$.

Então, $a \in \text{int}(X \cup Y)$

• se $a \in \operatorname{int} Y$. Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$B_\delta(a) \subset Y \subset X \cup Y.$$

Logo, $a \in \operatorname{int}(X \cup Y)$

[Obs.: P ou Q ; $P \Rightarrow R$; $Q \Rightarrow R \vdash R$]

Em qualquer dos casos segue que

$$a \in \operatorname{int}(X \cup Y).$$

Portanto, segue a contenção desejada.

$\square$