CÁLCULO 3, T_2 e T_3 — ATENDIMENTO DIA 20/04/26

→ esboço gráfico.

4. Determinar o vetor tangente ao hodógrafo[1] das seguintes funções vetoriais, nos seguintes pontos indicados:

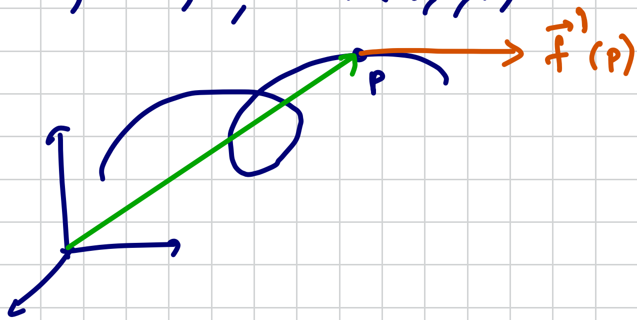
(a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $P(-1, 1, -1)$.

(b) $\vec{f}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $P(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

(c) $\vec{f}(t) = (2t, \ln t, 2)$, $P(2, 0, 2)$.

(d) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2 + 1)$, $P(1, 1, 1)$.

(d) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2+1)$; $P(1,1,1)$



$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t^2+1 \end{cases}$$

↳ em $P(\overset{x}{1}, \overset{y}{1}, \overset{z}{1})$, temos: $\begin{cases} e^t = 1 \\ e^{-t} = 1 \\ t^2+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{t=0}$

Queremos, então, $\vec{f}'(0)$.

Assim, como

$$\vec{f}'(t) = \left((e^t)', (e^{-t})', (t^2+1)'\right)$$

$$\Rightarrow \vec{f}'(t) = (e^t, -e^{-t}, 2t)$$

Assim: $\underline{f'(0)} = (e^0, -e^0 - 2\cdot 0)$

$= \underline{(1, -1, 0)}$

EXTRA: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Escreva a def de limite

$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$, usando a métrica d_∞ em $\mathbb{R}^3$

e a métrica d_1 em $\mathbb{R}^2$.

Sol:

$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = (u,v)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall (x,y,z) \in D(f)$:

$(x,y,z) \in B_\delta(a,b,c) \setminus \{(a,b,c)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z) \in B_\varepsilon(u,v)$.

Ou seja;

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall (x,y,z) \in D(f)$, tal que

$$0 < d_\infty((x,y,z); (a,b,c)) < \delta \implies$$

$$\implies d_1(\overbrace{f(x,y,z)}^{=(f_1(x,y,z);\ f_2(x,y,z))}, (u,v)) < \varepsilon.$$

$$|f_1(x,y,z) - u| + |f_2(x,y,z) - v| < \varepsilon$$

$$\max\{|x-a|; |y-b|; |z-c|\}$$

L2

7. Desenhe as superfícies definidas parametricamente pelas seguintes funções:

(a) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde $u, v \in \mathbb{R}$

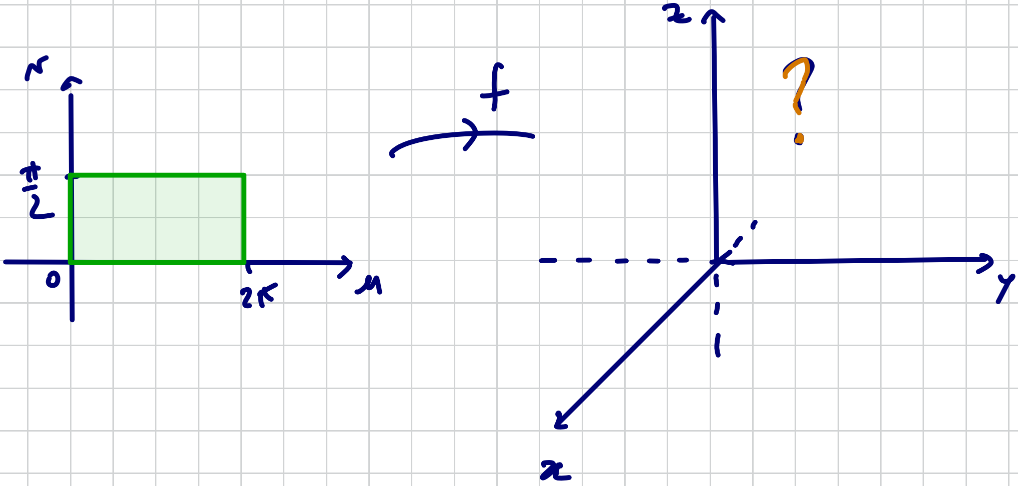
(b) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos v \end{pmatrix}$, onde $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

$$f(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$$

$$\boxed{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$$

$0 \le u \le 2\pi$

$0 \le v \le \frac{\pi}{2}$



No nosso caso, temos:

$$\begin{cases} x = \cos u \operatorname{sen} v \\ y = \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} v \\ z = \cos v \end{cases}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

isso para tentar obter alguma relação fundamental da trigonometria

$$\begin{cases} x^2 = \cos^2 u \cdot \operatorname{sen}^2 v \\ y^2 = \operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen}^2 v \\ z^2 = \cos^2 v \end{cases}$$

$+$

$$x^2+y^2+z^2 = \underbrace{\cos^2 u \cdot \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen}^2 v} + \cos^2 v$$

$$x^2+y^2+z^2 = \operatorname{sen}^2 v \, (\underbrace{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}_{=1}) + \cos^2 v$$

$$x^2+y^2+z^2 = \underbrace{\text{sen}^2 v + \cos^2 v}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=1.}$$ esfera no $\mathbb{R}^3$.

Como:

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$, então:

$-1 \leq \cos u \leq 1.$

$-1 \leq \text{sen}\, u \leq 1$

$0 \leq \text{sen}\, v \leq 1$

$0 \leq \cos v \leq 1$

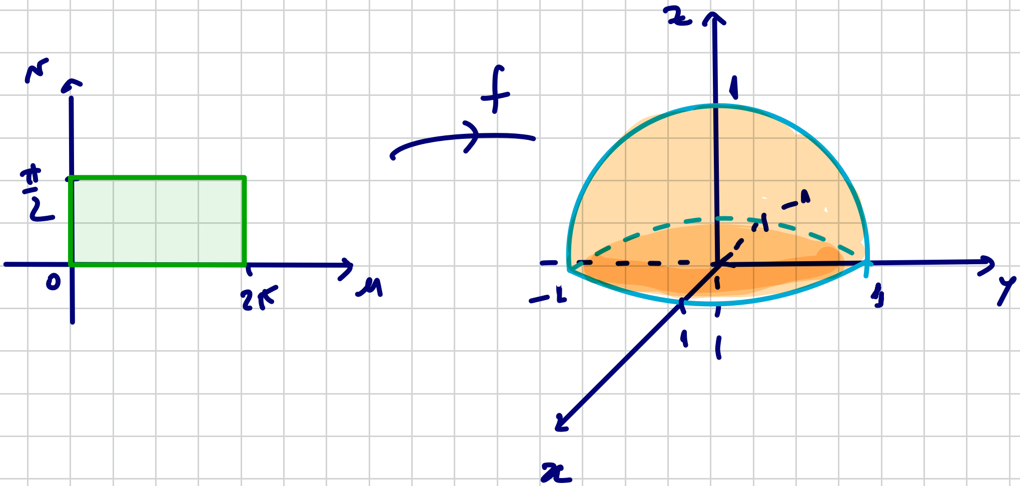
Assim:

- $x = \underbrace{\cos u}_{\text{entre: } -1 \text{ e } 1} \cdot \underbrace{\text{sen}\, v}_{\text{entre } 0 \text{ e } 1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

- $y = \underbrace{\text{sen}\, u}_{\text{entre } -1 \text{ e } 1} \cdot \underbrace{\text{sen}\, v}_{\text{entre } 0 \text{ e } 1.} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$

- $z = \underbrace{\cos v}_{\text{entre } 0 \text{ e } 1} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 1.$

Assim, temos:



L2

10. O potencial elétrico no ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ volts, onde

$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Trace as curvas equipotenciais de V em $16, 12, 8, 4, 1, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

$$V(x,y) = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

$V = 16$: qual é a curva?

$$V(x,y) = 16.$$

$$16 = \frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \quad (\div 4)$$

$$4 = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\left(4 \cdot \sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2 = (1)^2$$

$$16\left(9-x^2-y^2\right) = 1.$$

$$9-x^2-y^2 = \frac{1}{16}$$

$$x^2+y^2 = 9-\frac{1}{16}$$

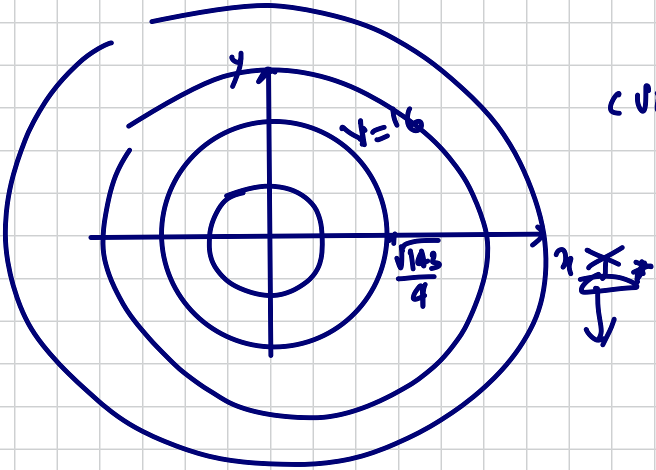
$$\bullet \quad x^2+y^2 = \frac{143}{16}$$

(circunf. centrada na origem e raio $\frac{\sqrt{143}}{4}$)

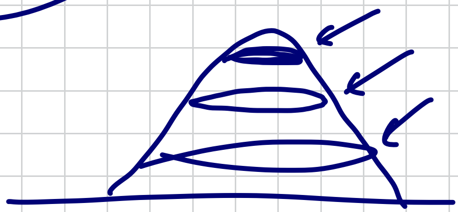
$$\begin{array}{r} 5 \\ 16 \\ \times 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

$\underline{\underline{V = 12}}$: (etc.)

para cada valor de V teremos uma circunf.



CURVAS DE NÍVEL.



L2

11. Suponhamos que a densidade por unidade de área de uma película fina, referida às coordenadas retangulares, planas, seja dada pela fórmula

$$d(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 1,$$

para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Esboce o conjunto de pontos nos quais a película tem densidade $\frac{7}{4}$.

$$x^2 + 2y^2 - x + 1 = \frac{7}{4} \qquad \times 4$$

$$4x^2 + 8y^2 - 4x + 4 = 7$$

$$4x^2 - 4x + 8y^2 = 3$$

$$(2x-1)^2 - 1 + 8y^2 = 3$$

$$(2x-1)^2+8y^2=4$$

$$\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+8y^2=4$$

$$4.\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8y^2=4 \qquad (\div 4)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1.$$

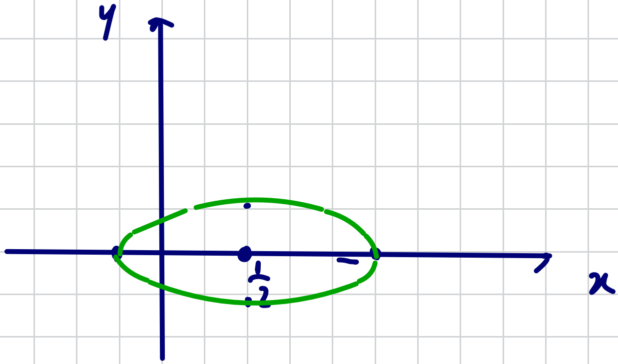
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1.$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1}+\frac{(y-0)^2}{\frac{1}{2}}=1.$$

elipse centrada em $\left(\frac{1}{2},0\right)$

e eixos $a=1$ e $b=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$


y
x
1/2