CÁLCULO 3, TURMA T2

30/03/26 – AULA 04

Na aula passada iniciamos o estudo de funções de várias variáveis reais:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_m)}_{x} \longmapsto \underbrace{(f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))}_{f(x)}$$

FUNÇÕES COORDENADAS:

$$f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

(todas funções escalares)

Quando $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a função chama-se função vetorial, e normalmente é anotada por $\vec{f}$.

Vejamos outros exemplos de funções vetoriais.

01) $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

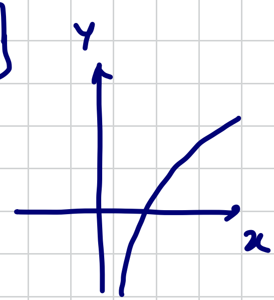
$$\vec{f}(t) = (t, \ln t, 1).$$

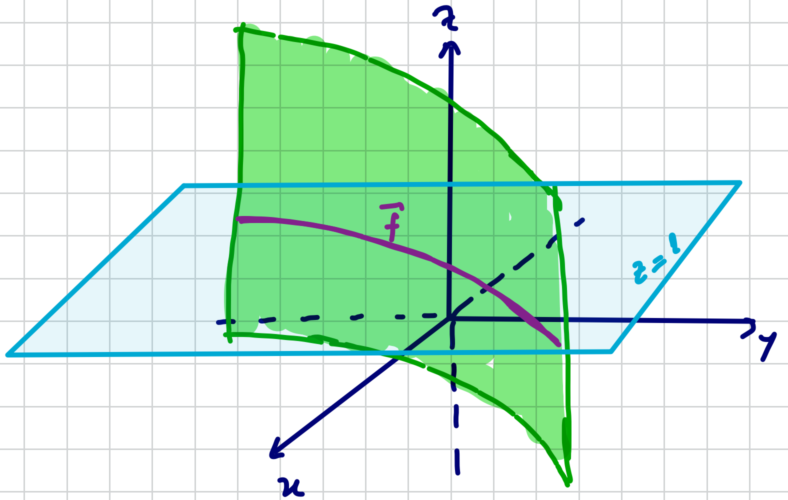
(a) $D\vec{f} = ?$

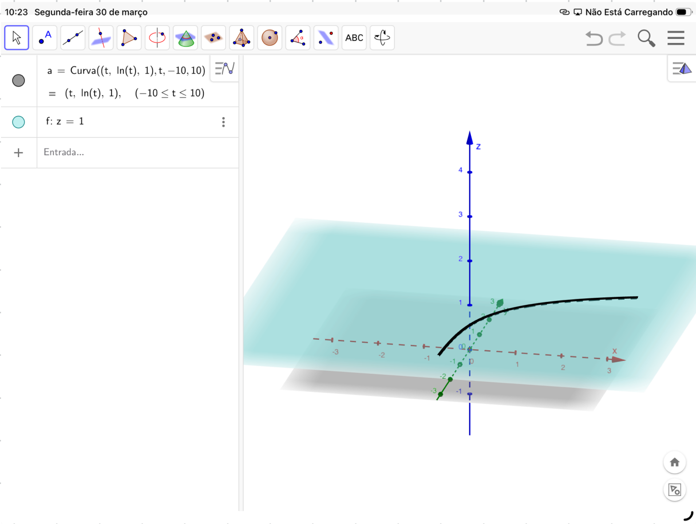
(b) esboço gráfico?

(b) A funções coordenadas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \ln t \\ \boxed{z = 1} \end{array} \right. \qquad \boxed{y = \ln x}$$







(a) $D\vec{f} = ?$

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} & \longrightarrow & D_1 = \mathbb{R} \\ y = \ln t \rightsquigarrow t > 0 & \longrightarrow & D_2 = (0, +\infty) \\ z = 1 \in \mathbb{R} & \longrightarrow & D_3 = \mathbb{R} \end{cases}$$

Assim, o domínio será:

$$\Omega = D\vec{f} = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (0, +\infty)$$

02) $\vec{f}(t) = (t^2+1,\ t,\ t-1)$

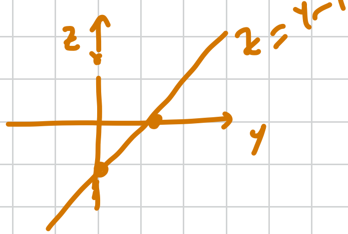
(a) $D\vec{f} = ?$

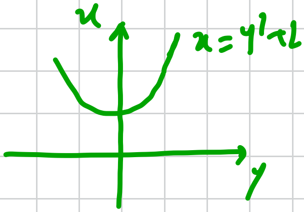
(b) esboça gráfico?

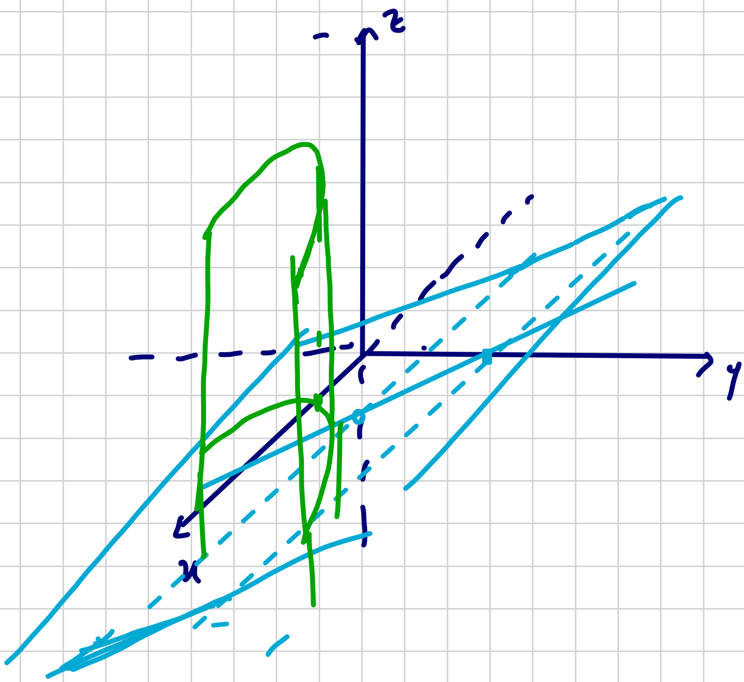
Solução: (a) $D\vec{f} = \mathbb{R}$, pois cada função coordenada é polinomial e portanto não há restrições para a variável t.

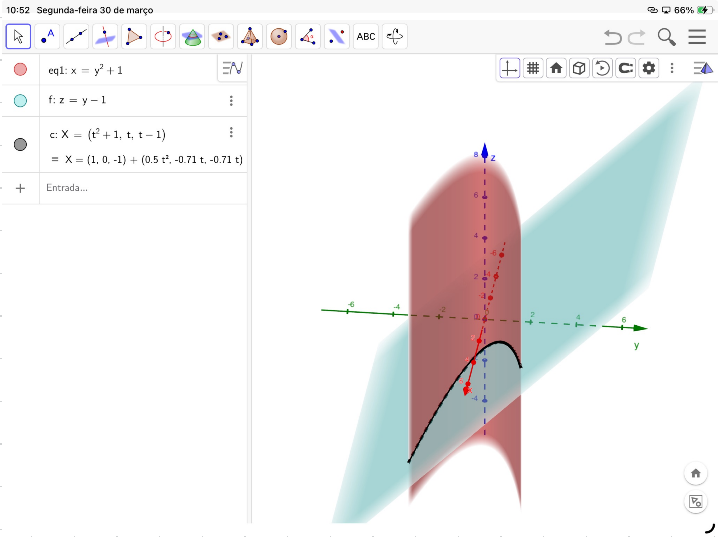
(b) As funções coordenadas são:

$$\left\{\begin{array}{l} x = t^2+1 \\ y = t \\ z = t-1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \rightarrow x = y^2+1 \\ \rightarrow z = y-1 \end{array}$$









03) $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

(a) $D(\vec{f}) = ?$

(b) gráfico?

<u>solução:</u> As funções coordenadas são:

(a)

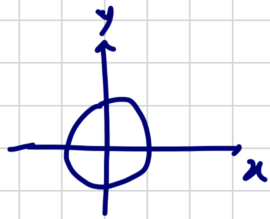
$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \longrightarrow D_1 = \mathbb{R} \\ y = \cos t \longrightarrow D_2 = \mathbb{R} \\ z = 1. \longrightarrow D_3 = \mathbb{R}. \end{cases}$$

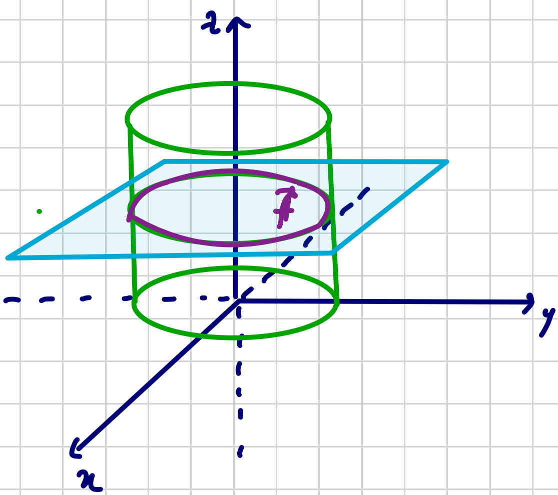
$$D\vec{f} = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{R}.$$

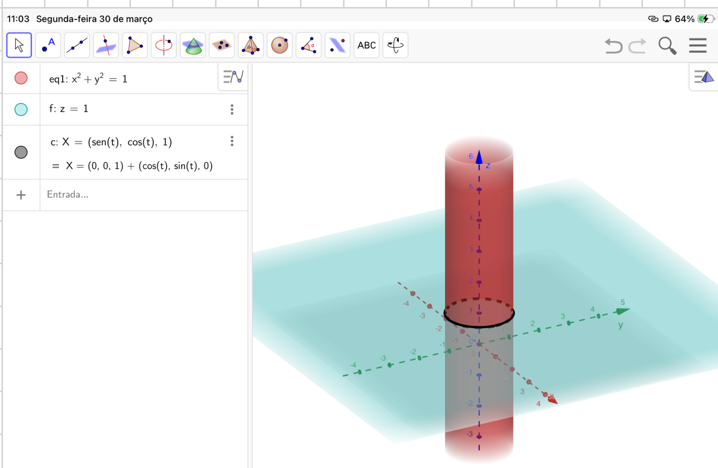
(b) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \\ \boxed{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(circunferência de raio unitário centrada na origem)







04) $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$$

$D\vec{f} = \mathbb{R}$

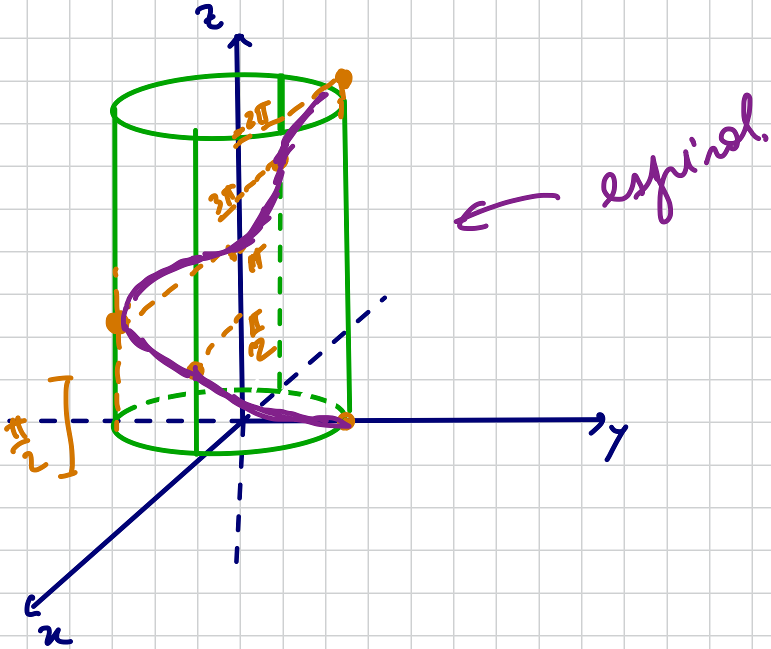
esboço gráfico: As funções coordenadas são:

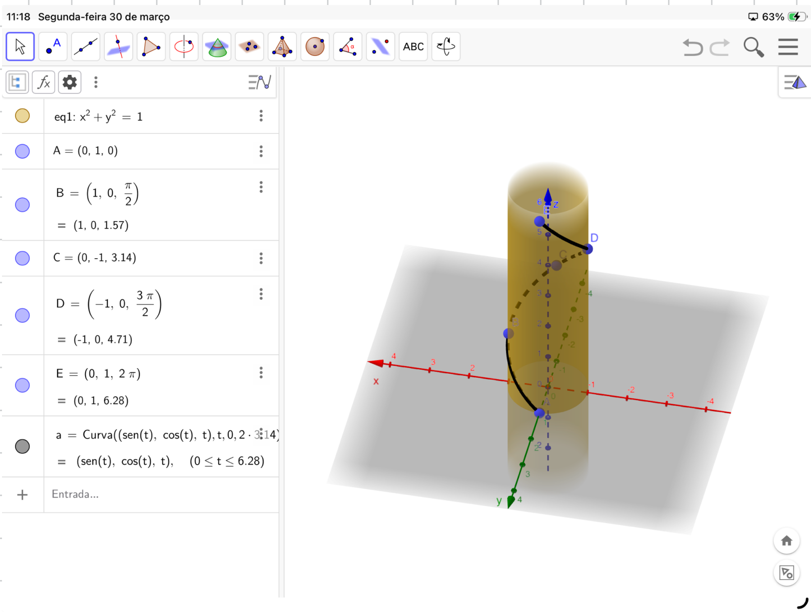
$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \\ \underline{\underline{z = t}} \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{matrix}\right\} \quad x^2 + y^2 = 1.$

$z = t \rightarrow$ isto indica que as alturas não variam conforme os arcos, mas todos os pontos estarão sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

$x = \operatorname{sen} t$	$y = \cos t$	$z = t$
0	1	0
1	0	$\frac{\pi}{2}$
0	-1	π
-1	0	$\frac{3\pi}{2}$
0	1	2π


z
y
x
espiral
2π
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$


11:18 Segunda-feira 30 de março
63%
ABC
eq1: $x^2 + y^2 = 1$
A = (0, 1, 0)
B = $\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$
= (1, 0, 1.57)
C = (0, -1, 3.14)
D = $\left(-1, 0, \frac{3\pi}{2}\right)$
= (-1, 0, 4.71)
E = $(0, 1, 2\pi)$
= (0, 1, 6.28)
a = Curva((sen(t), cos(t), t), t, 0, 2 · 3.14)
= (sen(t), cos(t), t), $(0 \leq t \leq 6.28)$
Entrada...
x
y
z
D
C

05) $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{f}(t) = (1, \sqrt{t-1}, t).$$

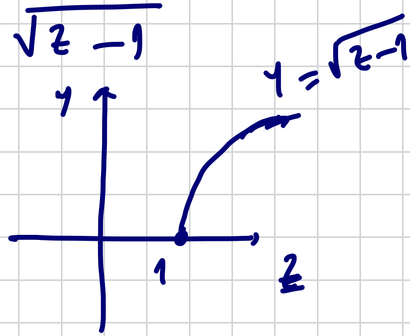
(a) $D\vec{f} = ?$

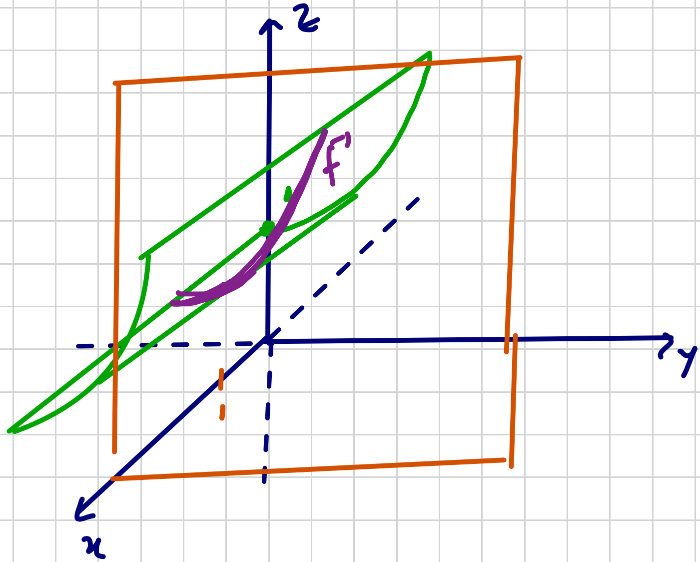
(b) esboço gráfico.

(a) $\begin{cases} x = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} \\ y = \sqrt{t-1} \rightsquigarrow t - 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1. \quad D_2 = [1, +\infty) \\ z = t \in \mathbb{R}. \Rightarrow D_3 = \mathbb{R}. \end{cases}$

$$D\vec{f} = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = [1, +\infty)$$

(b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{t-1} \\ z = t \end{cases} \Big\rangle \; y = \sqrt{z-1}$





FUNÇÕES ESCALARES DE $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$

São as funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. O domínio, neste caso, são regiões em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Ex.: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \sqrt{x+y}\,.$$

$D(f) = ?$

condição de existência : $x+y \geq 0$

$$\Leftrightarrow y \geq -x$$

$$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq -x \}$$

Como o domínio é uma região do $\mathbb{R}^2$, podemos construir o gráfico do domínio

onde: $y \geq -x$