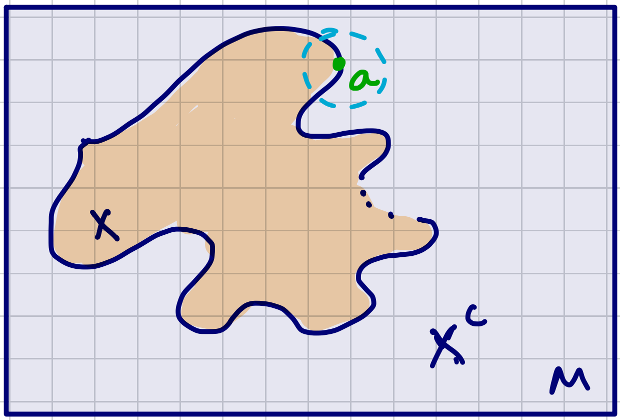
CÁLCULO 3, TURMA T2

27/03/26 - AULA 03

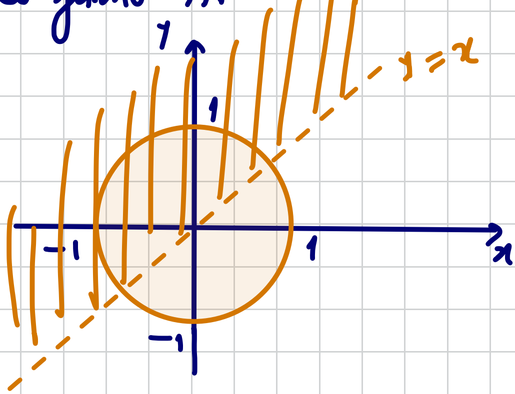
Terminamos a aula passada estudando o conceito de fronteira de um conjunto X, denotada por ∂X.

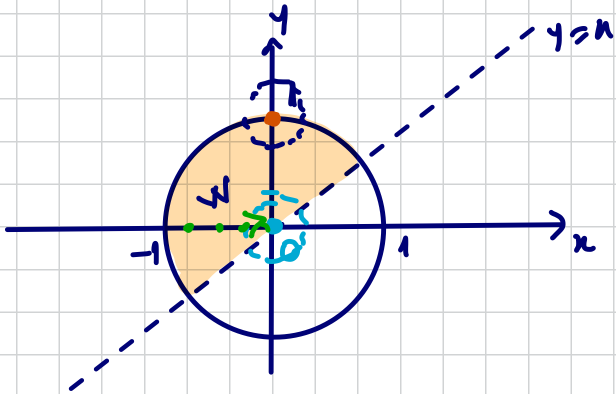


EXERCÍCIO: Seja W o conjunto:

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y > x\}.$$

Desenhe o conjunto W.





Note neste exemplo que; considerando a origem $(0,0)$; temos que:

- $(0,0) \notin int(W)$ pois $\forall \delta > 0$,
$$B_\delta(0,0) \not\subset W$$

- a origem $(0,0)$ pertence ao fecho de W, ou seja, $(0,0) \in \overline{W}$?
Sim, pois existe seq. $(x_n) \subset W$ tal que $x_n \to (0,0)$. [ou seja, $(0,0)$ é aderente a W].

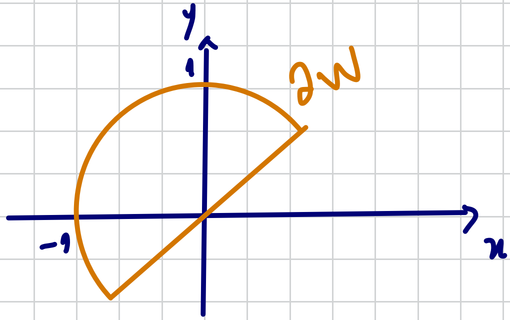
De fato; considere a sequência $(x_n) \subset W$ dada por:

$$x_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right). \quad \text{Então: } x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$$

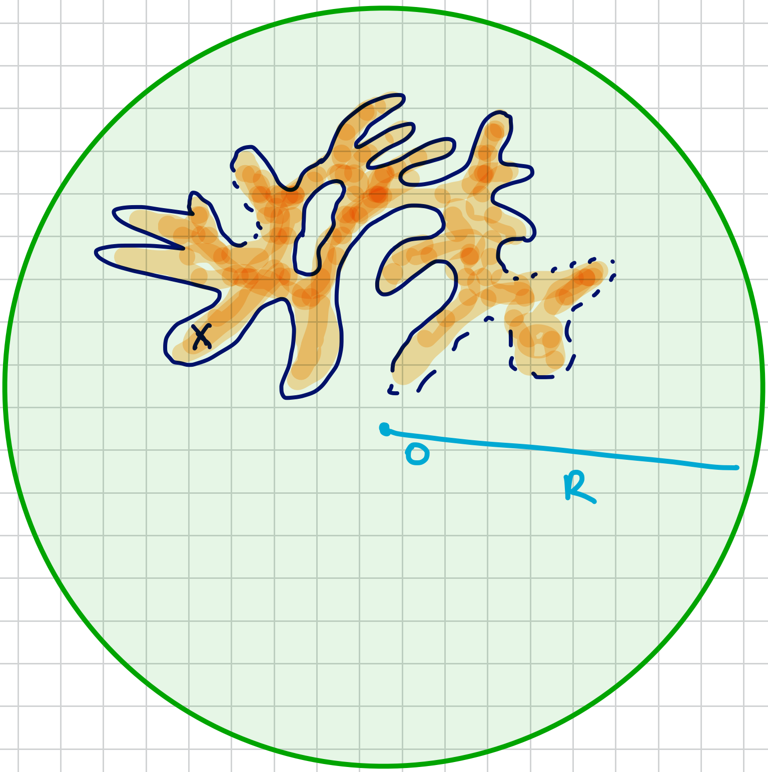
- W não é aberto de $\mathbb{R}^2$ pois, por exemplo, o ponto de coordenadas $(0,1)$ pertence a W mas não é interior a W; visto que $\forall \delta > 0 \; B_\delta(0,1) \not\subset W$.

- W não é fechado, pois, por exemplo, o ponto de coordenadas $(0,0)$ pertence ao fecho de W, mas não a W.

Qual seria o desenho de ∂W?



Def.: Dizemos que um conjunto X em um espaço métrico (M,d) é **limitado** se $\exists\, R>0$ tal que $X \subset B_R(0)$ [ou a bola estar centrada em outro ponto].



X é limitado.

Def.: Dizemos que um conj. X em um espaço métrico (M,d) é compacto quando for limitado e fechado.

O desenho acima ilustra um exemplo de um conjunto que não é compacto, pois, embora limitado, não é fechado.

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS.

Def.: Uma função de várias variáveis reais é uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que envia um ponto $\mathbb{R}^m$ para um ponto em $\mathbb{R}^n$.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \xmapsto{f} \Big(f_1(x_1, \ldots, x_m), f_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots$$
$$\ldots \underbrace{f_n(x_1, \ldots, x_m)}\Big)$$

n FUNÇÕES COORDENADAS.

EXEMPLOS:

01) Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ estudada na ALGA é um exemplo de uma função de várias variáveis reais.

EX.: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, \ x + z)$$

Neste caso, as funções coordenadas são:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x + 2y \\ f_2(x, y, z) = x + z \end{cases},$$

que são funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$.

02) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 + 2y, \ \mathrm{sen}(x \cdot y), \ x - y)$$

As funções coordenadas, neste caso, são:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2+2y \\ f_2(x,y) = \operatorname{sen}(xy) \\ f_3(x,y) = x-y \end{cases}$$

Def.: Uma função $f:\Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é chamada de função escalar.

Ex.: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2-3y}{z^2+1}$

é uma função escalar.

O gráfico de uma função escalar

$$f:\Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

ficará traçado no espaço $\mathbb{R}^{m+1}$.

Ex.: • $f:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ (cálculos 1 e 2)

Seu esboço gráfico fica em $\mathbb{R}^{1+1} = \mathbb{R}^2$

• $f:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seu gráfico ficará no $\mathbb{R}^3$.

• $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seu gráfico ficaria no $\mathbb{R}^4$ (não é possível um desenho)

Um exemplo simples:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^2+y^2$.

Qual o esboço gráfico?

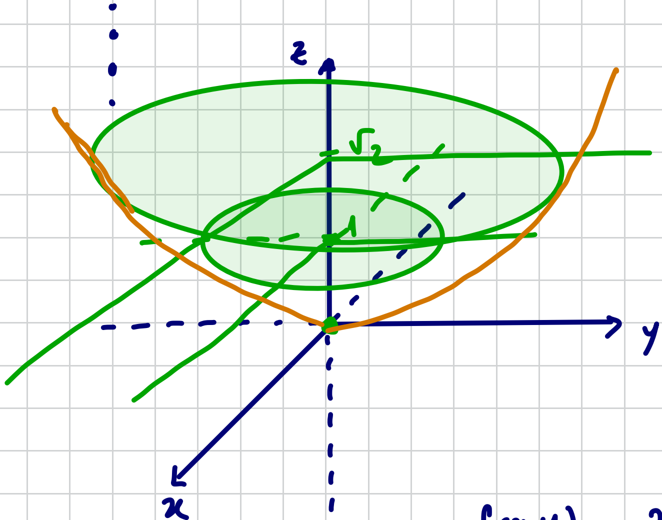
<u>SOLUÇÃO</u>: Escreva $z = f(x,y)$. Assim, temos $z = x^2+y^2$ (z = altura)

• $z=-1$: $x^2+y^2=-1$. (impossível)

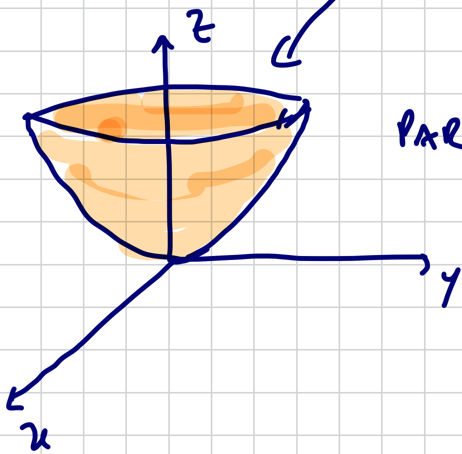
• $z=0$: $x^2+y^2=0 \iff (x,y)=(0,0)$ origem

• $z=1$: $x^2+y^2=1$. circunf. centrada na origem e raio 1.
[na altura $z=1$]

• $z=2$: $x^2+y^2=2$ circunf. centrada na origem e raio $\sqrt{2}$.
[na altura $z=2$]



$f(x,y) = x^2 + y^2$



PARABOLÓIDE

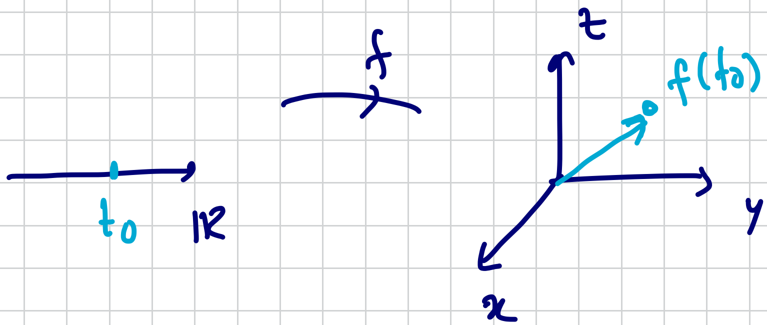
Def.: Uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$t \in \Omega \subset \mathbb{R} \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

é chamada de função vetorial a uma variável real t.

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(t) = (\underbrace{\operatorname{sen} t}_{f_1(t)}, \underbrace{1+t^2}_{f_2(t)}, \underbrace{\sqrt{t^2+1}\cdot \tan t}_{f_3(t)})$$



Neste caso, temos as funções coordenadas:

$$\begin{cases} x = f_1(t) = \operatorname{sen} t \\ y = f_2(t) = 1+t^2 \\ z = f_3(t) = \sqrt{t^2+1}\cdot \tan t. \end{cases}$$

Ex.: 01) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

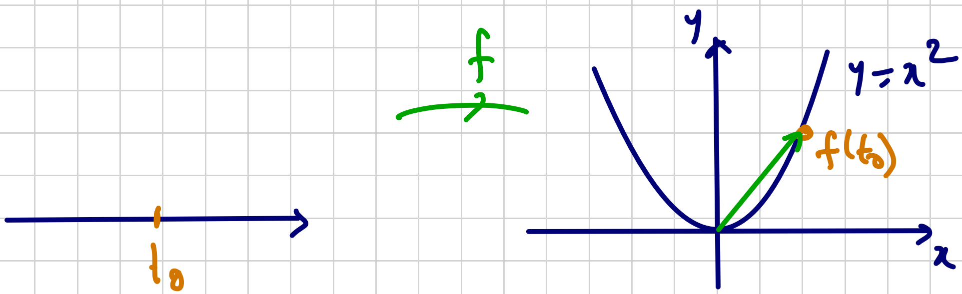
$$f(t) = (t, t^2)$$

gráfico?

Solução: Neste caso, temos as funções coordenadas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = t^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x^2}$$



02) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(t) = (\operatorname{sen} t, 2, \cos t)$$

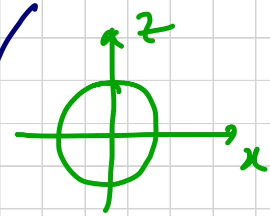
gráfico de f?

solução: As funções coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = 2 \\ z = \cos t \end{cases}$$

$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$x^2 + z^2 = 1$



esta circunf. no plano xz torna-se um cilindro no $\mathbb{R}^3$