

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3 - Turma T2 e T3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Noções de Topologia

1. Seja X o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ e seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ contínua. Defina

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx.$$

Mostre que (X, d) é um espaço métrico.

2. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que (M, d_1) e (M, d_∞) são espaços métricos, onde, para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$,

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{e} \quad d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Em seguida, defina e desenhe as bolas abertas de centro em $(0, 0)$ e raio unitário em (M, d_1) e (M, d_∞) .

Obs. Nunca mais ria do Quico do episódio do Chaves quando ele queria uma “bola quadrada” - ele só estava lidando com outra métrica diferente da euclidiana...

3. Seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

é uma métrica em \mathbb{R}^+ .

4. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

5. Mostre que uma sequência (x_n) converge para a em (X, d) se, e somente se, a sequência $(d(a, x_n))$ converge para 0 em \mathbb{R} com a métrica usual.
6. Mostre que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ em \mathbb{R}^2 , com a métrica usual se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em \mathbb{R} com a métrica usual.
7. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que
- (a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.
 - (b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.
8. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.
9. Se $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, determine $\text{int}(A)$.
10. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a \mathbb{R}^2 ? Justifique.
11. Mostre que o subconjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é um aberto de \mathbb{R}^2 .
12. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ é um aberto do \mathbb{R}^2 .
13. Mostre que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é um fechado de \mathbb{R} .

14. Mostre que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais não é fechado e nem aberto de \mathbb{R} . Qual é o fecho de \mathbb{Q} ?
15. Faça o desenho de cada região do \mathbb{R}^2 abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do \mathbb{R}^2 . Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do \mathbb{R}^2 .
- (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
 - (b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$
 - (c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy < 1\}$
 - (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$