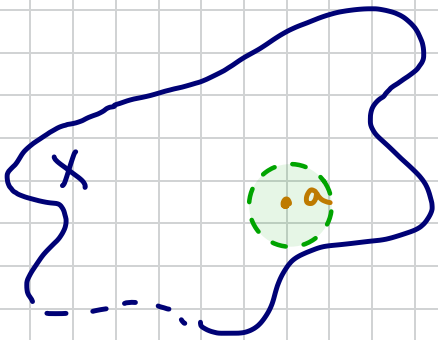
CÁLCULO 3, T3. 25/03/26 - AULA 02

Na aula passada vimos o conceito de espaço métrico e a definição de bola.

Vimos também o conceito de ponto interior de um conjunto $X \subset M$: $a \in M$ é um ponto interior a um conjunto X se, e somente se, $\exists R > 0$, tal que $B_R(a) \subset X$.



Def.: O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto $X \subset M$, chama-se interior do conjunto X, e é denotado por $\text{int}(X)$.

PROPOSIÇÃO: Dados X e Y conjuntos de um espaço métrico (M, d), tais que $X \subset Y$. Então, $\text{int}(X) \subset \text{int}(Y)$.

DEMONSTR: Sejam $X, Y \subset M$, com $X \subset Y$. Dado $a \in \text{int}(X)$ um elemento qualquer no interior de X. Vamos mostrar que $a \in \text{int}(Y)$.

De fato, como $a \in \text{int}(X)$, segue que $\exists\, R > 0$ tal que $B_R(a) \subset X$.

Como, por hipótese, $X \subset Y$, segue que

$$B_R(a) \subset X \subset Y \Rightarrow B_R(a) \subset Y.$$

Logo, $a \in \text{int}(Y)$.

Pela arbitrariedade da escolha de a, segue que $\text{int}(X) \subset \text{int}(Y)$. □

Vejamos alguns exemplos:

01) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq d_2((x,y);(0,0)) \leq 2\}$.

Desenhe X e $\text{int}(X)$.

Solução: Os pontos (x,y) de X são tais que

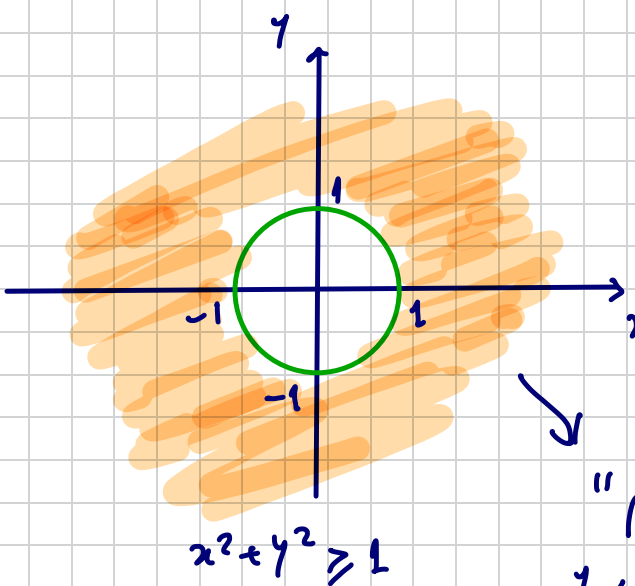
$$1 \leq \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \leq 2.$$

$$\Leftrightarrow \quad (1)^2 \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \leq (2)^2$$

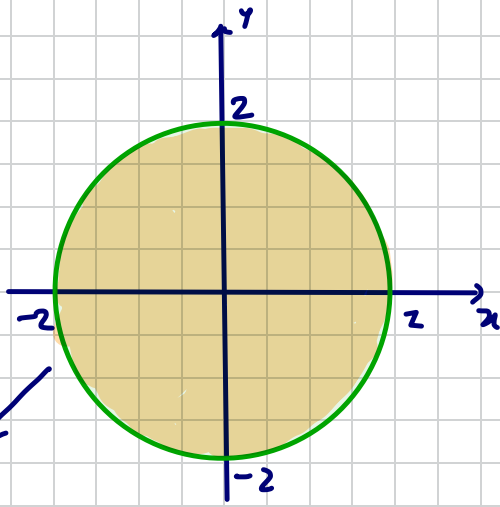
$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$$

$x^2+y^2 \geq 1$ (região externa à circunf. centrada na origem e raio 1

região interna à circunferência centrada na origem e raio 2.

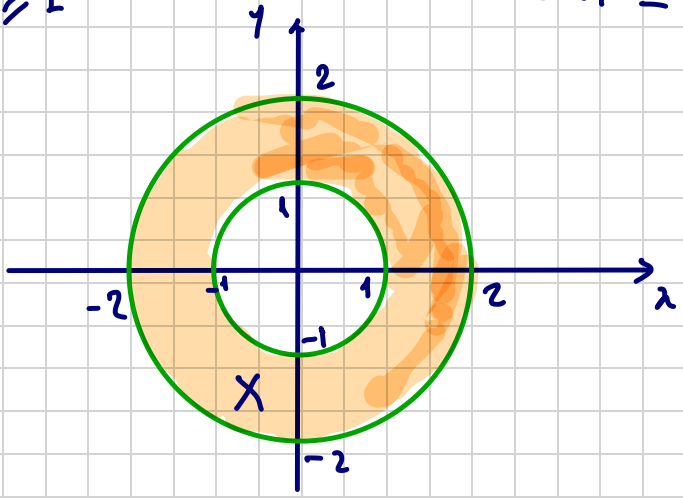


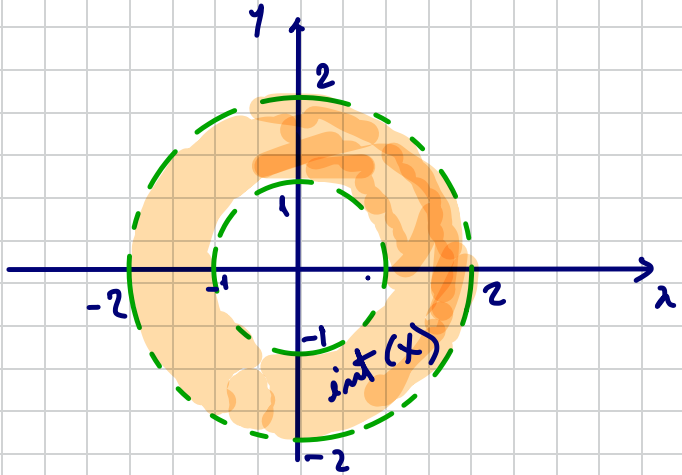
$x^2+y^2 \geq 1$



$x^2+y^2 \leq 4$

"$\cap$"





o2) Sendo $M = \mathbb{R}$. e $X = \mathbb{Q}$.

$\text{int}\,\mathbb{Q} = ?$

Dado $a \in \mathbb{Q}$ um elemento qualquer, como o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$ (ou seja, entre dois números reais quaisquer sempre tem-se números irracionais) então, qualquer bola centrada em a conterá números irracionais.

conclusão: $\forall\, R > 0$, $B_R(a) \not\subset \mathbb{Q}$, $\forall a \in \mathbb{Q}$.

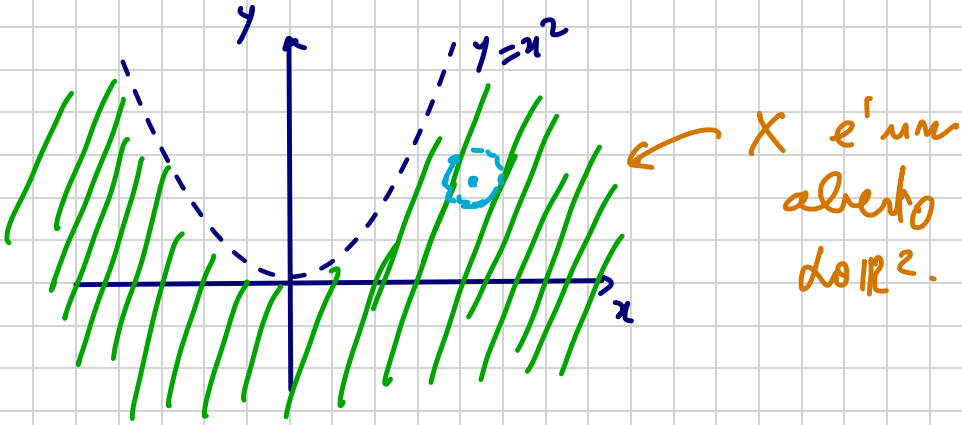
Então, $\text{int}\cdot\mathbb{Q} = \emptyset$.

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset M$ é um aberto de M se todos os seus pontos forem interiores.

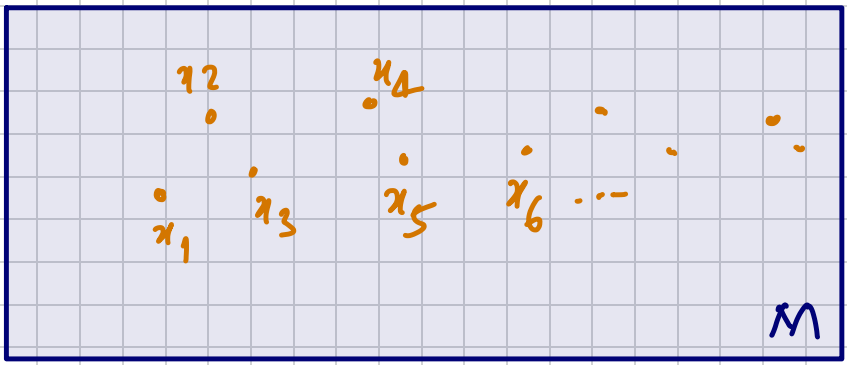
Ou seja, X é um aberto de M se $\operatorname{int} X = X$.

O exemplo 1 dado acima é um exemplo de um conjunto que não é aberto, pois há pontos que não são interiores.

Ex.: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$.



Def.: Chama-se uma sequência em um métrico (M, d) um conjunto (infinito) de pontos de M.



$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

é uma sequência de pontos de M.

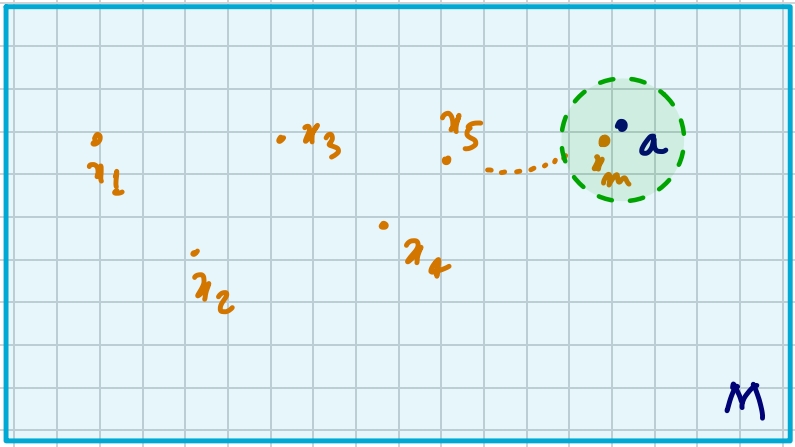
Def.: Dizemos que $a \in M$ é o limite de uma sequência de pontos $(x_n) \subset M$, e escrevemos

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a,$$

se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$



Na escrita: dado $\varepsilon > 0$, constrói-se uma bola centrada em a e raio ε; e então vai existir um índice n_0, tal que, a partir desse índice, todos os termos da sequência ficam no interior de $B_\varepsilon(a)$, ou seja, vão ter que

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Todas as propriedades de limites de sequências vistas no Cálculo 2, valerão em um espaço métrico M. Por exemplo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

então $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$$

Def: Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$ um conjunto não vazio de M. Dizemos que $a \in M$ é um **ponto aderente** ao conjunto X se, e somente se, existir uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

NOTAÇÃO: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n \to a$.

Ex.: $M = \mathbb{R}$; e seja $X = [0, 1)$.

Note que $1 \notin X$, mas 1 é um ponto aderente ao conj. X, pois podemos construir uma seq. de pontos de X que converge para 1:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

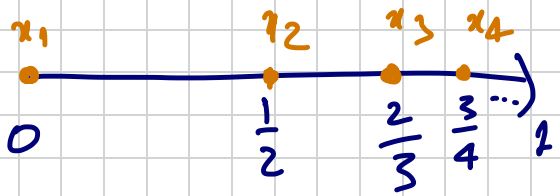
$$x_1 = 1 - 1 = 0$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\vdots$$

$x_n \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$



Note que: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$

$x_n \to 1$; logo, 1 é' ponto aderente a X.

Note que se $x \in X$, então x já é' aderente a X. De fato, basta considerar a sequência constante:

$$(x_n) = (x, x, x, \dots);$$

que é' tal que $x \in X$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Def.: Chama-se fecho de um conjunto X o conjunto de todos os pontos aderentes de X.

Denotamos o fecho de X por $\overline{X}$.

Ou seja:

$$\overline{X} = \{ x \in M : \exists (x_n) \subset X : x_n \to x \}.$$

Ex.: $M = \mathbb{R}$. $X = [0, 1)$.

$$\overline{X} = ?$$

$$\overline{X} = X \cup \{1\} = [0, 1].$$

Note que $X \subset \overline{X}$. De fato, dado $x \in X$, basta considerar a sequência $(x_n) = (x, x, x, \dots)$, que é tal que $x_n \to x$. Portanto, $x \in \overline{X}$.

Def.: Dizemos que um conj. $X \subset M$ é fechado em X quando $X = \overline{X}$.

Como sempre vale a contenção $X \subset \overline{X}$, podemos enfraquecer a def. acima dizendo que $X \subset M$ é um fechado de M se, e somente se, $\overline{X} \subset X$.

Prop.: Um conjunto $X \subset M$ é fechado se, e somente se, o seu complementar X^c for um aberto.

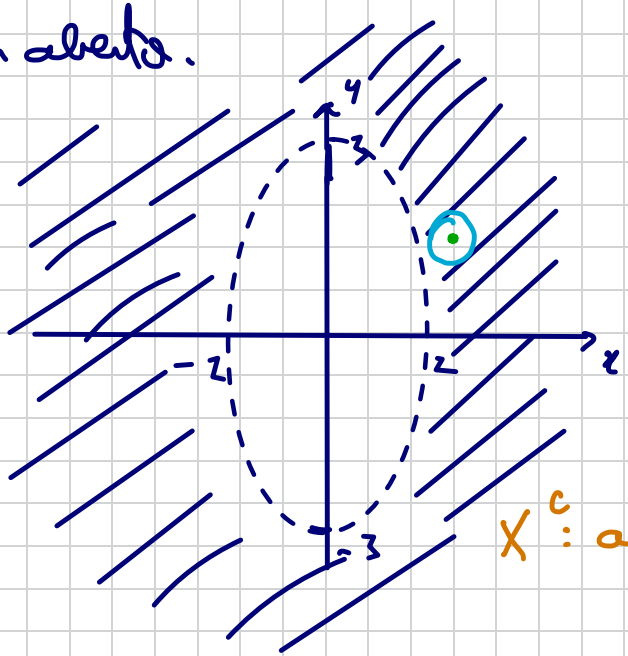
A demonstração requer resultados de Análise, e, portanto, é omitida.

Ex.: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

é um fechado de $\mathbb{R}^2$, pois o seu complementar X^c, dado por:

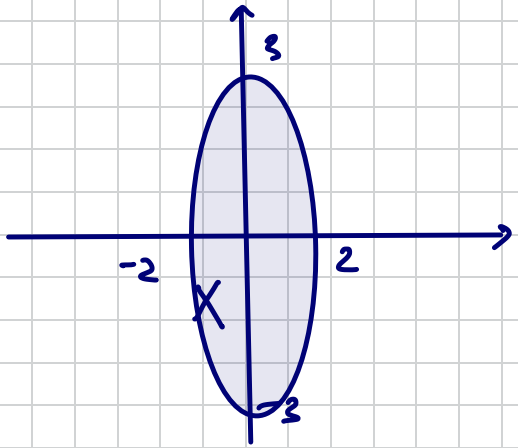
$$X^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1\}$$

é um aberto.



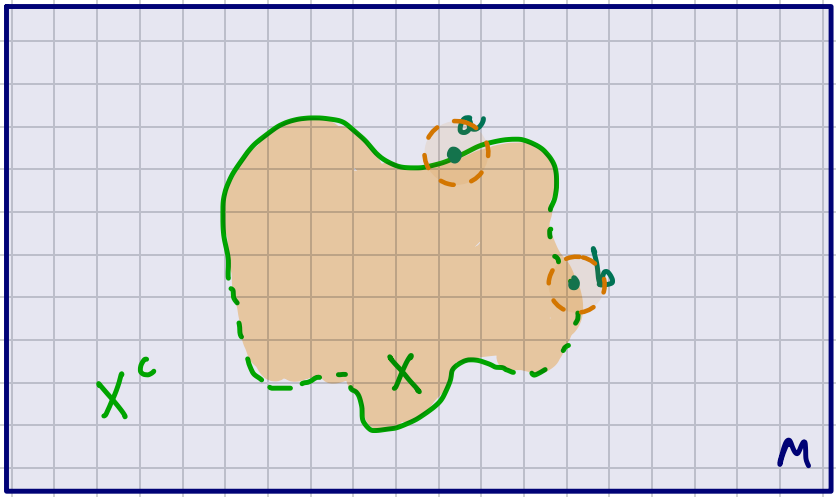
X^c: aberto $\mathbb{R}^2$

Logo: X é um fechado de $\mathbb{R}^2$.



Def.: Dizemos que um ponto $a \in M$ é um ponto de fronteira de um conjunto $X \subset M$ se, e somente se, $\forall\, \delta > 0$,

$$B_\delta(a) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_\delta(a) \cap X^c \neq \emptyset.$$



Os pontos a e b são pontos de fronteira do conj. X.

O conjunto de todos os pontos de fronteira de um conj. X é chamado de fronteira do conjunto e é denotado por ∂X.