

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DAS LISTAS.

L2:

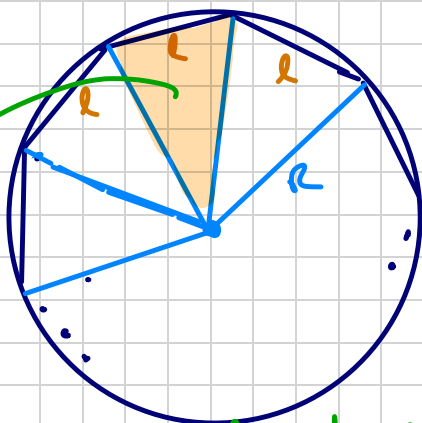
14/02/26

21. Considere um polígono regular de n lados com medida de cada lado igual a ℓ , inscrito numa circunferência de raio R . Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos n triângulos isósceles.

- (a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circunferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.
- (b) Mostre que a área A_n do polígono regular de n lados pode ser determinada pela fórmula

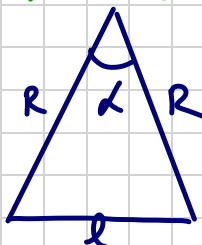
$$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

- (c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado ℓ , de um triângulo equilátero de lado ℓ e de um hexágono regular de lado ℓ .
- (d) Considerando que $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.



n lados de medida ℓ !

n triângulos isósceles de base ℓ e os lados congruentes R .

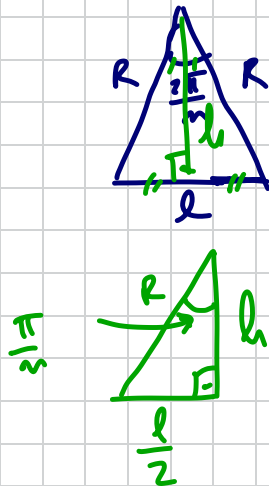


a) mostrar que $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

De fato, considerando o centro da circunferência como o vértice comum dos n triângulos isósceles, segue que o ângulo interno α de cada um deles será dado por

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

b) A área do polígono regular será dada por:

$$A = n \cdot A_3, \text{ onde } A_3 \text{ denota a área de um dos triângulos isósceles.}$$


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h \cdot \tan \frac{\pi}{n} = \frac{l}{2}$$

$$h = \frac{l}{2 \cdot \tan \frac{\pi}{n}}$$

Dessa forma, obtenemos:

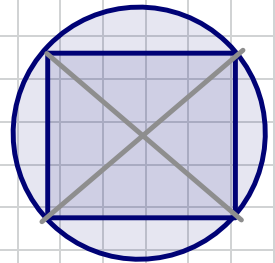
$$A_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2 \tan \frac{\pi}{n}}}{2}$$
$$= \frac{l^2}{2 \tan \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}}$$

Portanto, a área A do polígono regular será dada por:

$$A = n \cdot A_3 = n \cdot \frac{l^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{n l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{n}}$$

(c) • Área do quadrado: $n=4$

$$A = \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{l^2}{1} = l^2$$



• Área do triângulo equilátero: $n=3$.

$$A = \frac{3 l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{3 l^2}{4 \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} l^2}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

• hexagone régulier: $n=6$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{n l^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{\cancel{6} \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{\cancel{6}}} = \frac{3 l^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= 3 l^2 \cdot \frac{3}{2 \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 l^2 \cdot \cancel{3} \sqrt{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \underline{\underline{\frac{3 l^2 \sqrt{3}}{2}}} \end{aligned}$$

~~~~~

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$n=5$ :

$$A = \frac{5 l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{5}} = \frac{5 l^2}{4 \cdot \tan 36^\circ}$$

$$\frac{\pi}{5} \quad \frac{180^\circ}{5} \frac{15}{36^\circ}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\alpha = 36^\circ \in 1^{\text{er}} \text{q}$$

$$\Rightarrow \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \frac{b}{2}} = \sqrt{\frac{2-b}{2}}$$

Dimo:

$$\tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{2-b}{2}}}{\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{2}{b} \cdot \sqrt{\frac{2-b}{2}}$$

Assim, obtenemos:

$$A = \frac{5 \cdot l^2}{4 \cdot \tan 36^\circ} = \frac{5 l^2}{4 \cdot \frac{2}{b} \cdot \sqrt{\frac{2-b}{2}}}$$

$$A = \frac{5 l^2}{\frac{8}{b} \cdot \sqrt{\frac{2-b}{2}}}$$

### LISTA 03:

4. Determine os valores de  $x$  para os quais

$$(a) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(b) \sec \frac{2x}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

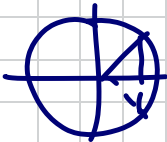
$$(c) \csc(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}.$$

$$(b) \sec \frac{2x}{3} = +\frac{2\sqrt{3}}{3} ; \quad \frac{2x}{3} \in 1^{\text{og}} \text{ ou } 4^{\text{og}}.$$

Também os ângulos (isso se não lembrar dos valores da secante)

$$\frac{1}{\sec \frac{2x}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{3} = 30^\circ \quad (1^{\text{og}})$$



$$\frac{2x}{3} = 360^\circ - 30^\circ \quad (4^{\text{og}})$$

ou seja:

$$\frac{2x}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot 6} \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

$$x = \frac{3\pi}{2 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{\cancel{6}_2 \cdot \frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{x = \frac{11\pi}{4}}}$$

Soluções :  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  ou  $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{4}$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ .

$$(c) \quad \csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Tomando o inverso:

$$\frac{1}{\csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} \in 1^{\text{og}} \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{4} \in 2^{\text{og}}. \end{array} \right.$$

1<sup>og</sup>:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2<sup>o</sup>:  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \pi + 2k\pi$$

Sol!:  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ou  $x = \pi + 2k\pi$ ,  
 $\forall k \in \mathbb{Z}$ .



13.

7. Calcule o valor de  $y = \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ)$ .

$$y = \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \dots \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$$

$$y = \ln(\tan 1^\circ \cdot \cot(90^\circ - 89^\circ) \cdot \tan 2^\circ \cdot \cot(90^\circ - 88^\circ) \dots$$

$$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\dots \tan 45^\circ \cdot \cot(90^\circ - 45^\circ)$$

$$= \ln(\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ \dots \tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ) =$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$= \ln\left(\cancel{\tan 1^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 1^\circ}} \cdot \cancel{\tan 2^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 2^\circ}} \dots \cancel{\tan 45^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan 45^\circ}}\right)$$

$$= \ln(1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1) = \ln 1 = 0$$

L3  
19. Mostre que

$$(a) \frac{\sec \alpha - \csc \alpha}{\sec \alpha + \csc \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}.$$

$$\textcircled{b} \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2 \csc x.$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x) \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x) \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{\overset{1=}{\sin^2 x + \cos^2 x} + 1 + 2 \cos x}{(1 + \cos x) \cdot \sin x} = \frac{2 + 2 \cos x}{(1 + \cos x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{2(1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \cdot \sin x} = 2 \cdot \frac{1}{\sin x} = \underline{2 \cdot \csc x}.$$

Ca:

15. Provar que  $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ .

Sebemos das fórmulas do arco-metade que:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Dito, temos:

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{\cancel{1 + \cos x} - (1 - \cos x)}{\cancel{1 + \cos x}} = \frac{\cancel{1} \cos x}{\cancel{1 + \cos x} + 1 - \cancel{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cancel{1 + \cos x}} = \underline{\underline{\cos x}}$$