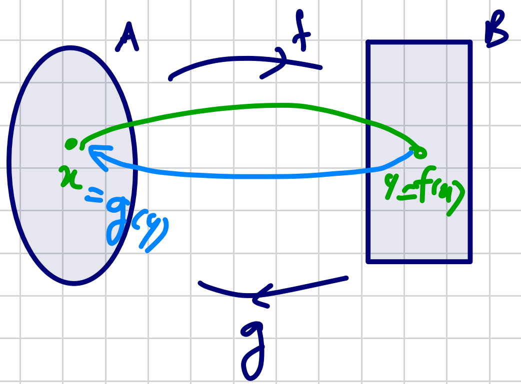
FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

11/02/26 – AULA 13

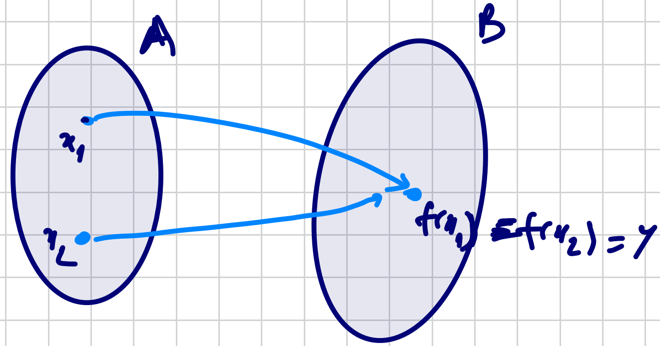
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

(a) FUNÇÃO ARCO SENO: Antes de iniciar qualquer estudo devemos lembrar que uma função $f: A \to B$ é inversível se, e somente, for bijetiva. Isto porque se $f: A \to B$ for inversível, então a função inversa $g: B \to A$ será, tal que retorna para $x \in A$ o $y = f(x) \in B$.



Dessa forma, para f ter inversa ela deve ser injetiva e sobrejetiva (bijetiva).

Injetiva pois; se não for



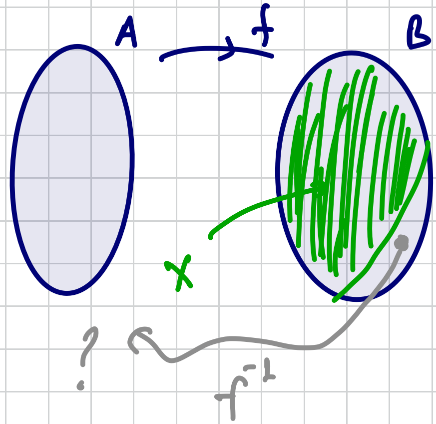
Então, se pensarmos em $g: B \to A$, teríamos

$g(y) = x_1$ e $g(y) = x_2$, $x_1 \neq x_2$

(Ou seja, g não é função)
Por isso f deve ser injetiva.

Do mesmo modo, f deve ser sobrejetiva.
Se não for, por exemplo, temos a situação:

EX. DE f NÃO SOBREJETIVA.



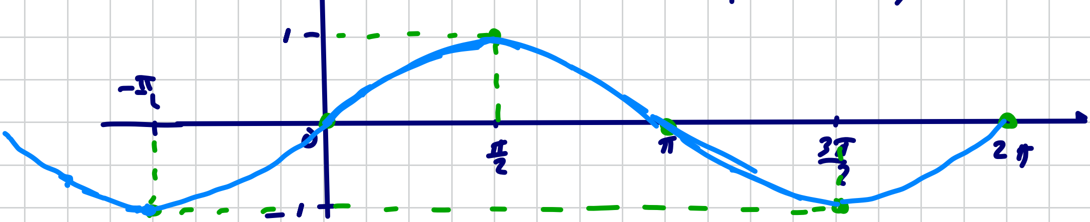
$Im(f) = X$

para $g = f^{-1}: B \to A$
nem todos elementos de B são usados.
Absurdo!

Com isso recordado vamos considerar uma candidata à inversa para $y = \operatorname{sen} x$.

O problema que o seno não é bijetivo (nem injetivo e nem sobrejetivo), se definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

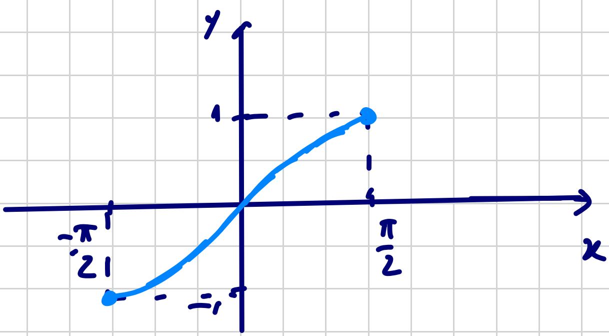
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$.



Para termos uma inversa para o seno precisamos restringir domínio e contradomínio de modo a ser bijetiva.

Redefina por $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

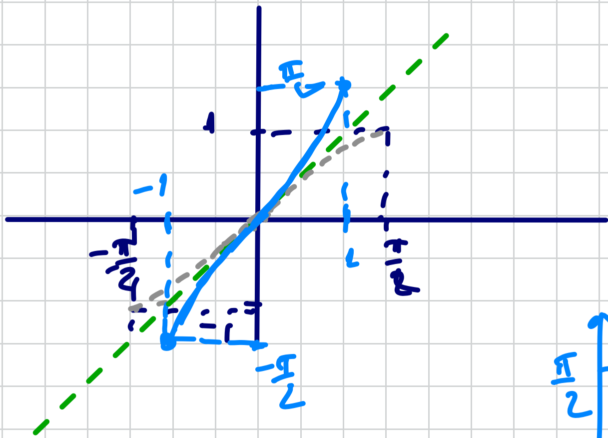
$f(x) = \operatorname{sen} x$.

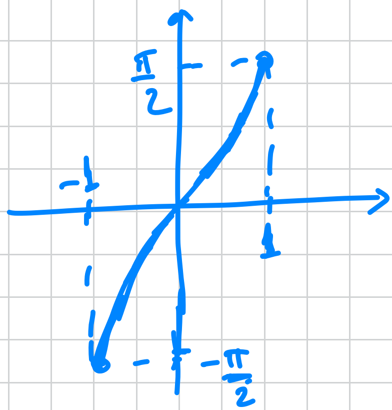


Logo, existe $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = \text{arcsen}\, x \iff x = \text{sen}\, y$$

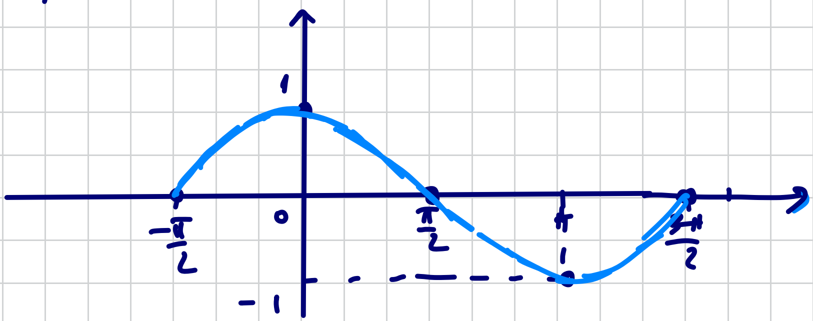
Esboço gráfico: usamos a técnica do espelhamento sobre a reta $y = x$.





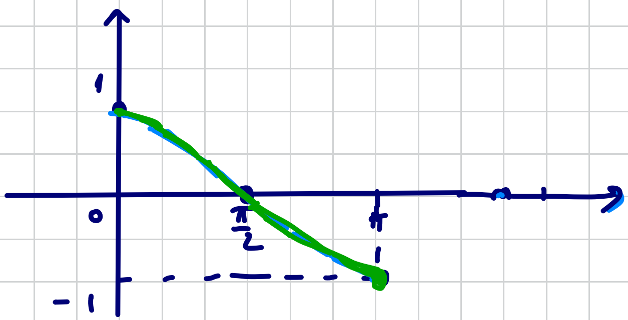
$y = \text{arcsen}\, x$.

(b) FUNÇÃO ARCO COSSENO: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ não é bijetiva do mesmo modo que o seno.



Redefina $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$,

$f(x) = \cos x$.



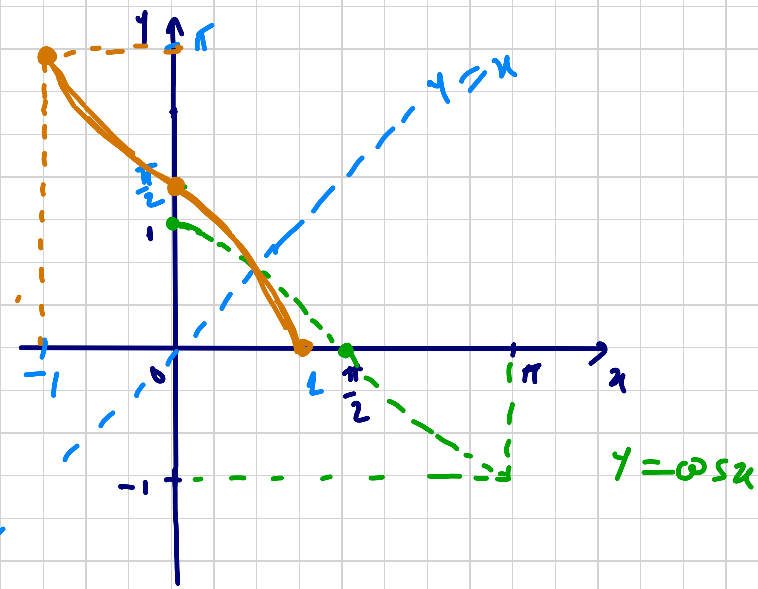
Logo, existe inversa $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$

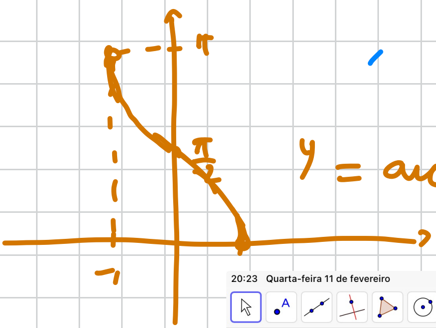
$y = f^{-1}(x) = \arccos x$

$\Updownarrow$

$x = \cos y$

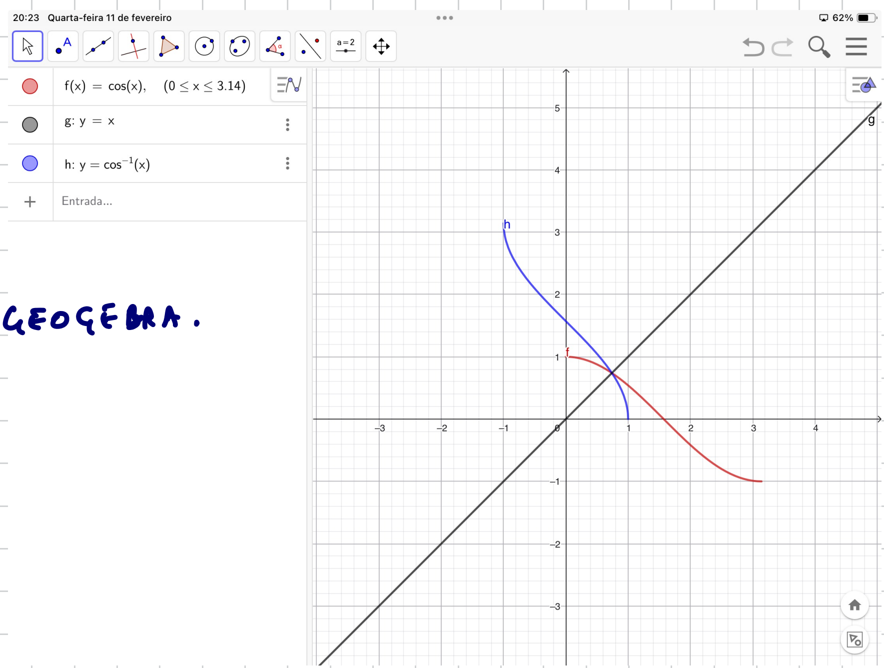
Esboço gráfico de $y = \arccos x$:





$y = \arccos x$.

PELO GEOGEBRA.



(c) FUNÇÃO ARCOTANGENTE:

A função $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tan x$$

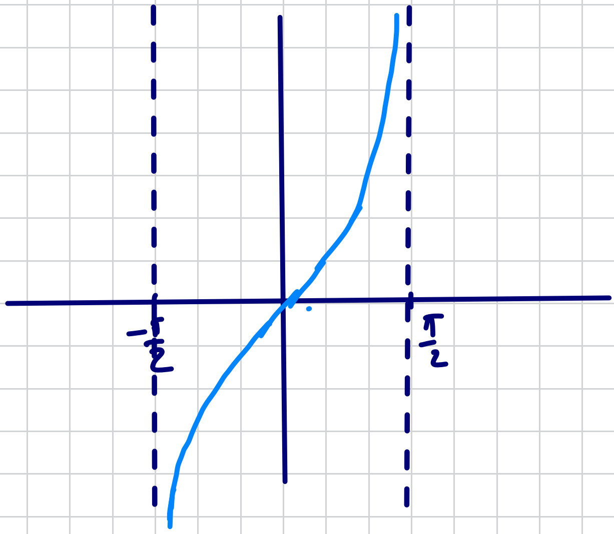
não é bijetiva.

Redefinindo por

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x\,,$$

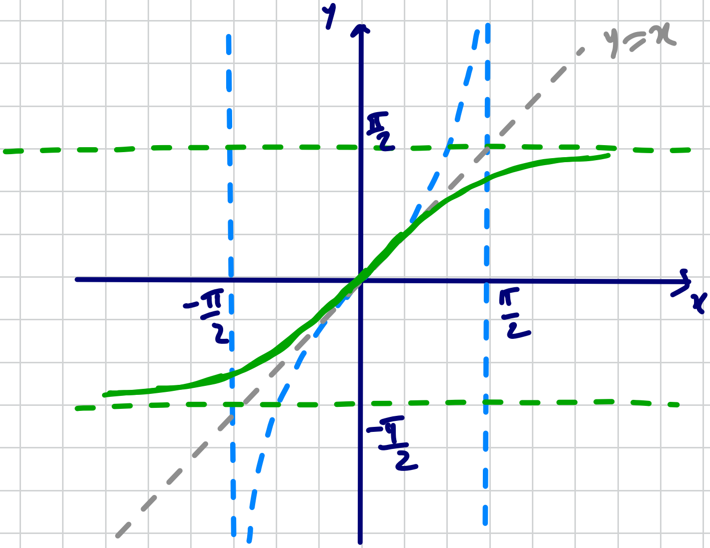
torna-se bijetiva.

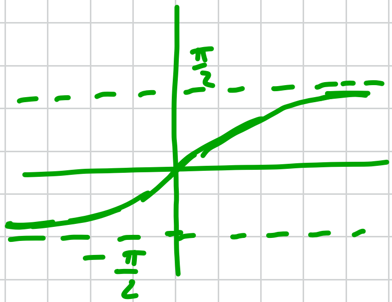


Logo, $\exists\, f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y = f^{-1}(x) = \arctan x \iff x = \tan y$$

Pela técnica do espelhamento sobre a bissetriz $y=x$ esboçamos o gráfico de $y = \arctan x$.





Assim como se faz com as demais funções, a partir dos gráficos básicos, mediante translações podemos esboçar gráficos mais gerais.

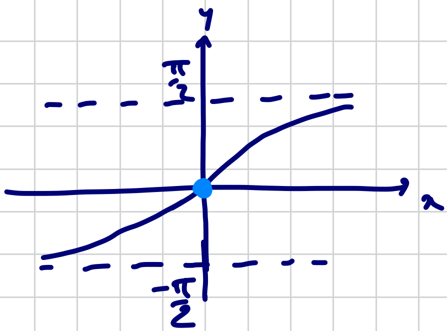
Ex.: Esboce o gráfico de

$$y = \pi + \arctan(x-1),$$

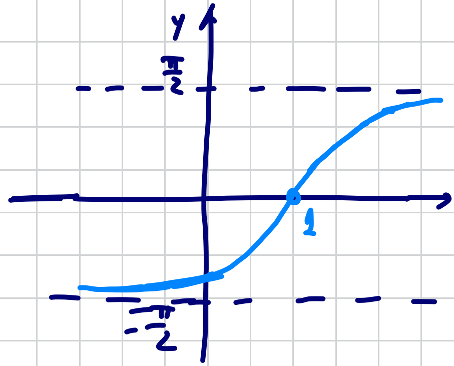
indicando domínio e imagem.

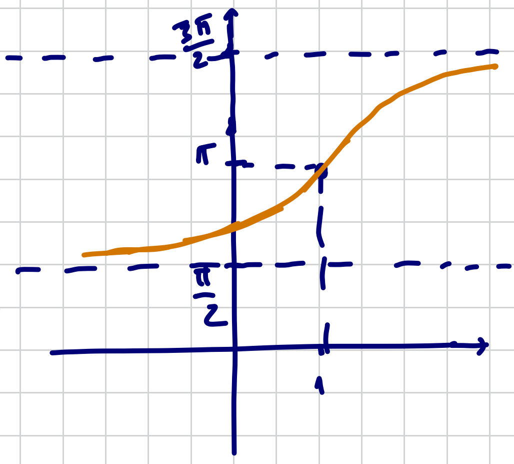
Solução:

1º: $y = \arctan x$



$y = \arctan(x-1)$





Assíntota inferior passa para:

$$y = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

Assíntota superior passa para:

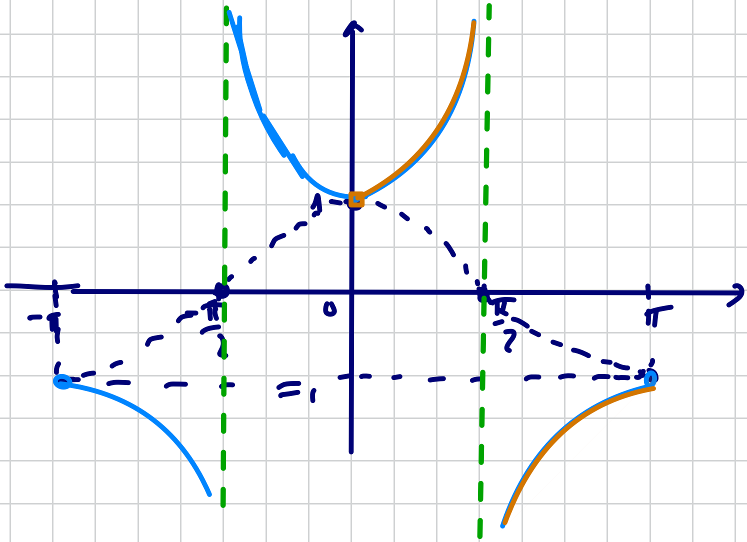
$$y = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$y = \pi + \arctan(x-1)$$

$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Analogamente definem-se as outras três funções trigonométricas inversas. Veremos como definir a função $y = \text{arcsec}\, x$.

Para isso, precisamos restringir a função $y = \sec x$ de modo a ser bijetiva.



Redefina

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sec x.$$

Esta função redefinida é bijetiva.

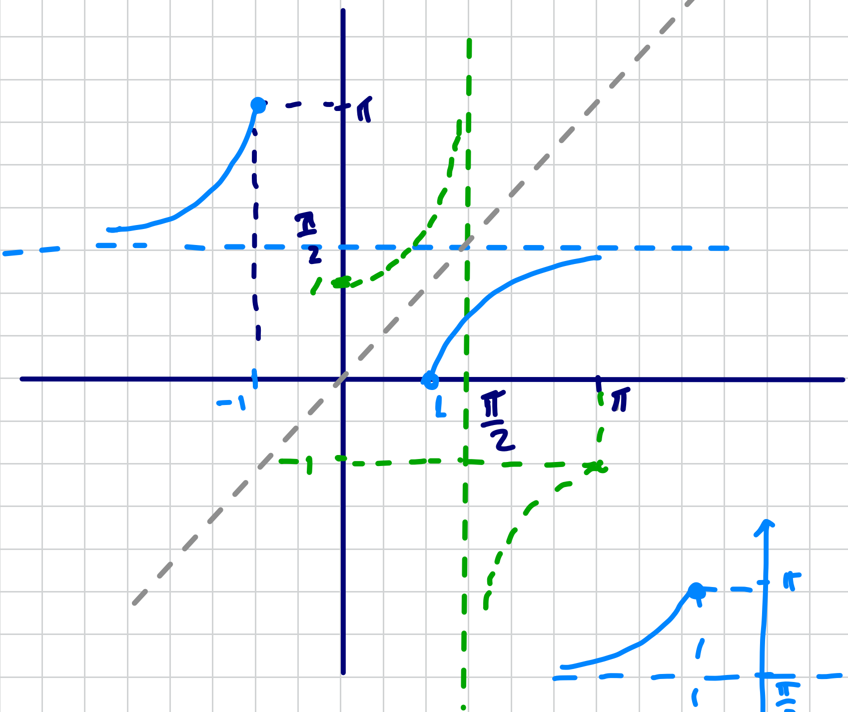
Logo, $\exists\, f^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

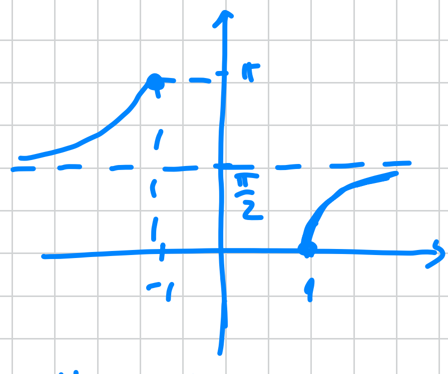
$$y = f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \sec y$$

Esboço gráfico: usamos de novo a técnica do espelhamento em $y = x$:





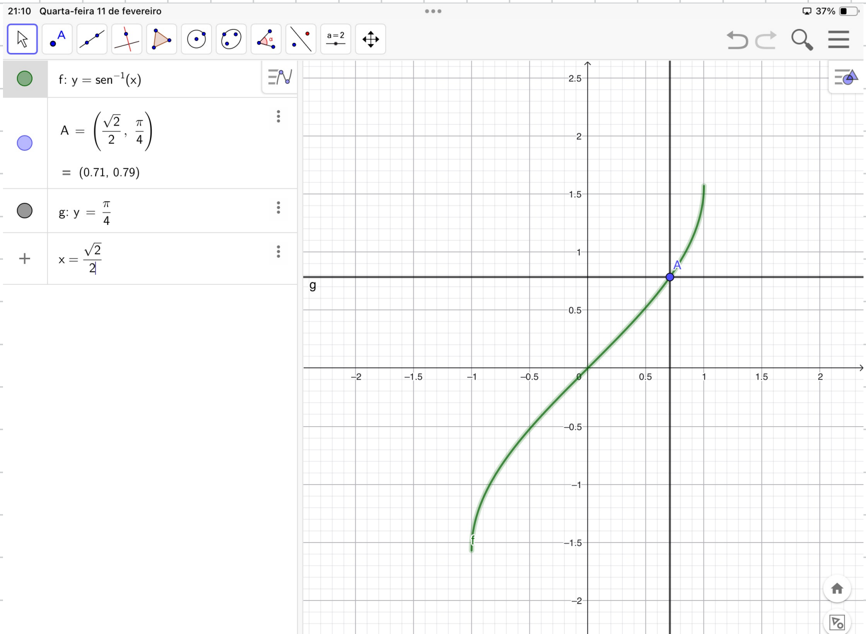
$y = \operatorname{arcsec} x$.

Analogamente podem ser construídas as funções $y = \text{arccsc}\, x$ e $y = \text{arc}\cot x$.

Obs.: NOTAÇÃO: Algebricamente, escrevemos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Isso quer dizer que no gráfico da função arco seno, o valor $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ associa-se ao valor $\frac{\pi}{4}$.



LISTA 05:

8. Mostre que $\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arcsen}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\pi}{2}$.

Escrevo $\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{5}} \iff \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\beta = \operatorname{arcsen} \frac{2}{\sqrt{5}} \iff \operatorname{sen}\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Queremos mostrar que

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Note que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot \cos\beta + \underbrace{\operatorname{sen}\beta}_{\frac{2}{\sqrt{5}}} \cdot \cos\alpha$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Do mesmo modo:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Assim, obtemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}+\frac{4}{5} = 1.$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$

Ou seja:

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$