FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

04/02/26 – AULA 12

Na aula anterior vimos as três primeiras funções trigonométricas diretas. Veremos as outras três.

FUNÇÃO SECANTE: Chama-se função secante a função$^{(*)}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \}$;

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

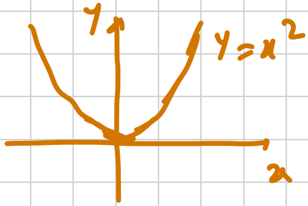
O esboço gráfico da função secante é feito a partir da função cosseno correspondente, bastando tomar os inversos.

Obs.: graficamente, tomar inversos corresponde a traçar o esboço de uma função $g(x)$ considerando $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, onde $f(x)$ é conhecida.

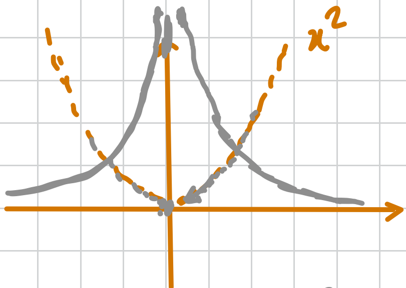
(*) Note que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Logo, a secante não existe onde o cosseno é zero. Ou seja,

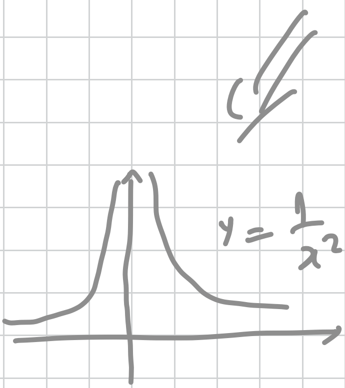
$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ex.: sendo $f(x) = x^2$, cujo gráfico é:



Como seria o gráfico de $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$?





$x = 0{,}1 \to \frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$

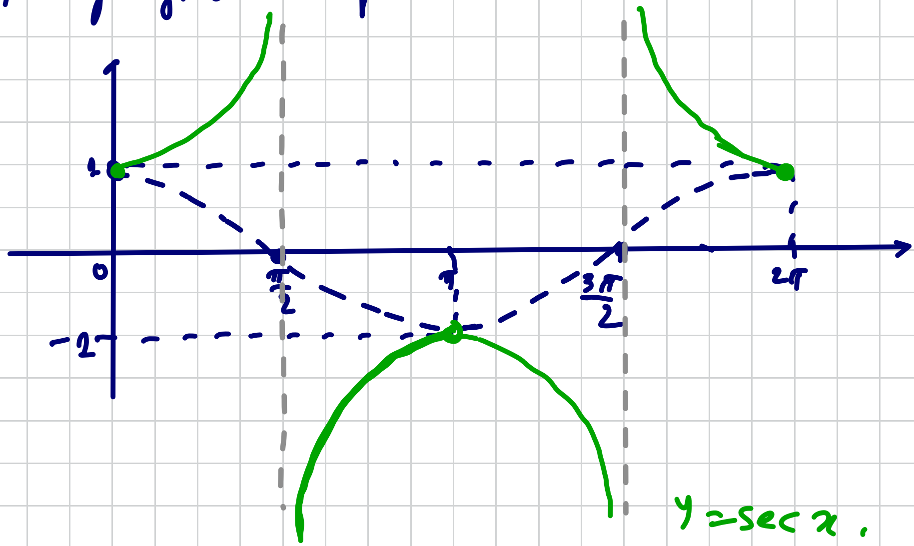
$x = 0{,}01 \to \frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}01} = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$

$x = 1000 \to \frac{1}{x} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Dessa forma, para construir o esboço gráfico da função secante, esboçamos o gráfico do cosseno correspondente, tomando, em seguida, os inversos.

Ex.: Esboce o gráfico de $y = \sec x$, indicando domínio, imagem e período.

Solução: considere inicialmente $y = \cos x$; cujo esboço gráfico é apresentado abaixo:



$P = 2\pi$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \}$.

$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

As retas $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$; $\forall k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas verticais.

02) Esboce o gráfico de $y = 1 - 2.\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, indicando domínio, imagem e período.

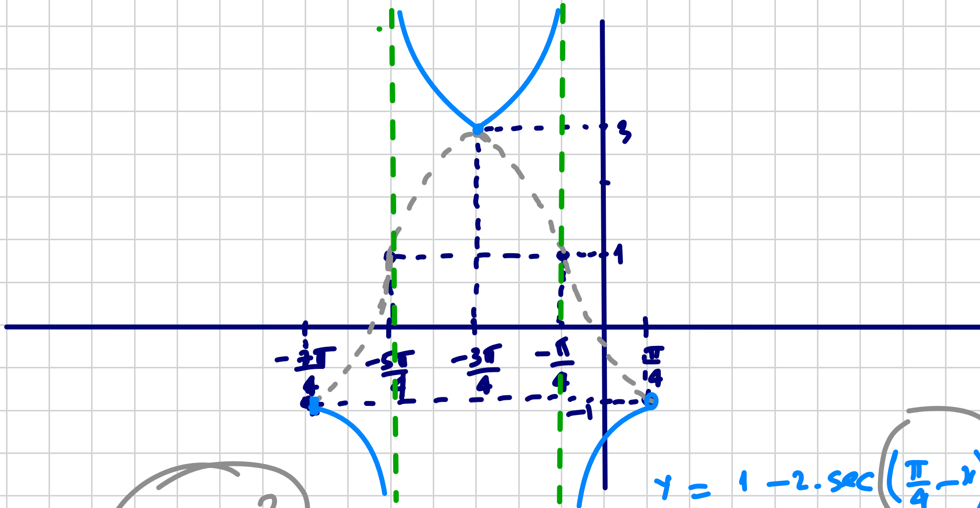
<u>solução</u>: Primeiramente, considere construir o esboço gráfico de $y = 1 - 2\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{t}$.

Escreva $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - t$.

Assim, temos:

$$y = 1 - 2.\cos t.$$

t	$y = 1 - 2.\cos t$	$x = \frac{\pi}{4} - t$
0	$1 - 2 = -1$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2.0 = 1$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$
π	$1 - 2.(-1) = 3$	$\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2.0 = 1$	$\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}$
2π	$1 - 2.1 = -2$	$\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$



$y = 1 - 2\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$D(f) = ?$

$\frac{\pi}{4} - x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$-x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$-x \neq k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \neq -k\pi - \frac{\pi}{4}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi - \frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

FUNÇÃO COSSECANTE: Definimos a função cossecante por

$$f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \csc x.$$

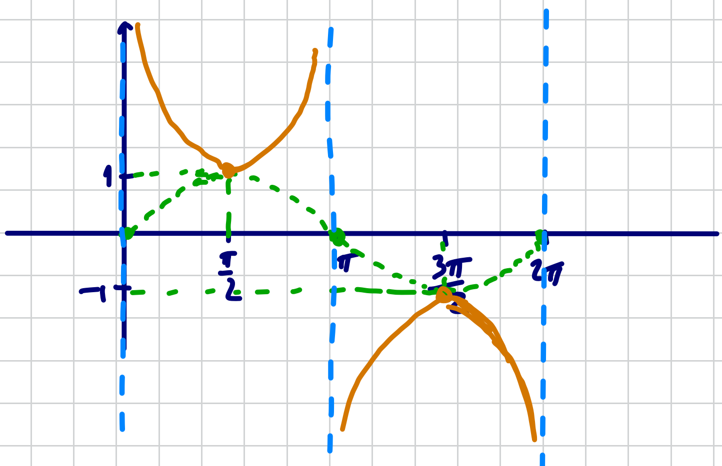
retiramos estes pontos pois neles o seno seria zero, e, desta forma, a cossecante não existe, visto que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

temos, então, infinitas assíntotas verticais da forma $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

O esboço gráfico da cossecante segue o mesmo procedimento que fizemos para esboçar a secante, pensando na função seno correspondente.

Ex. 01) Esboce o gráfico de $y = \csc x$, indicando domínio, imagem e período.

SOLUÇÃO: A função seno correspondente é $y = \operatorname{sen} x$.



$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$P = 2\pi$

02) Item para a função $y = 2 + \csc\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

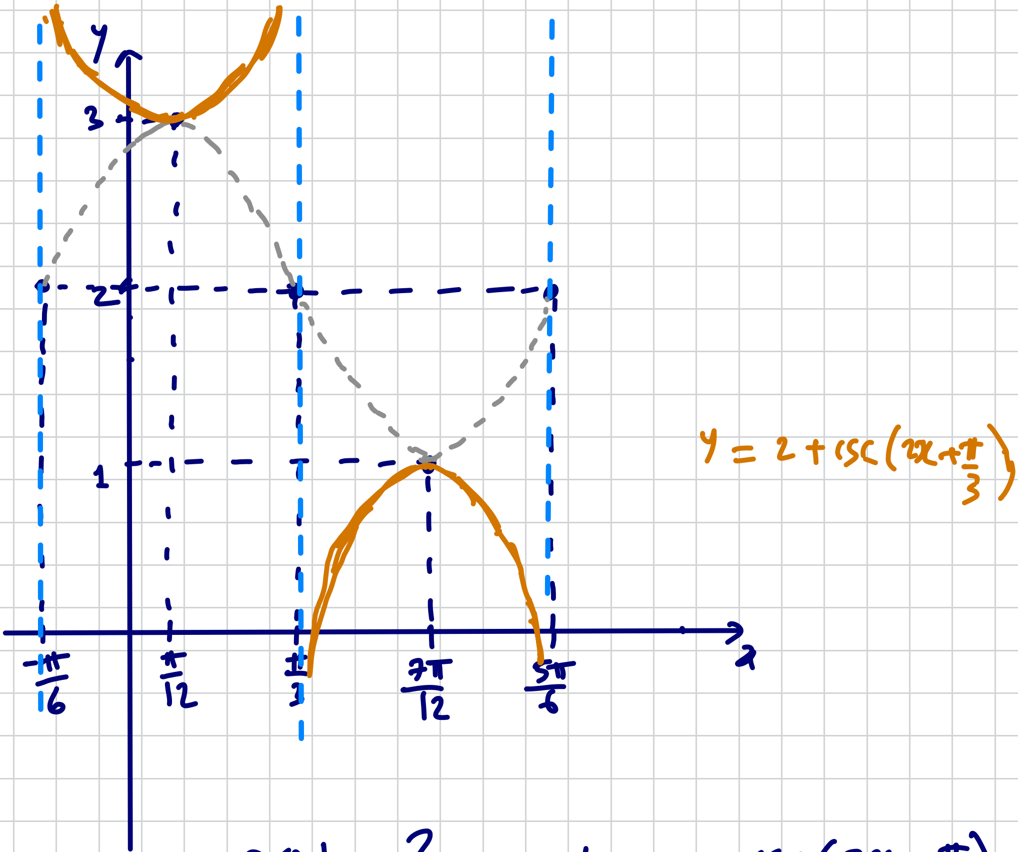
Solução: Primeiramente, construímos o esboço gráfico de $y = 2 + \operatorname{sen}\left(\underbrace{2x + \frac{\pi}{3}}_{t}\right)$.

Escreva $2x + \frac{\pi}{3} = t$. Assim:

$$x = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Disso, tem-se: $y = 2 + \operatorname{sen} t$.

t	$y = 2 + \operatorname{sen} t$	$x = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}$
0	$2 + 0 = 2$	$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$2 + 1 = 3$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$
π	$2 + 0 = 2$	$\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$2 - 1 = 1$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - 2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
2π	$2 + 0 = 2$	$\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



$D(f) = ?$ $\qquad y = 2 + \csc\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\underbrace{2x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi}$$

pois nestes arcos a cossecante não existiria.

$$\Updownarrow$$

$$2x \neq k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$Im(f) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

$$P = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

FUNÇÃO COTANGENTE: Chama-se função cotangente a função $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}.$$

retiramos os arcos da forma $k\pi$ pois neles a tangente seria zero, e então a cotangente não existiria.

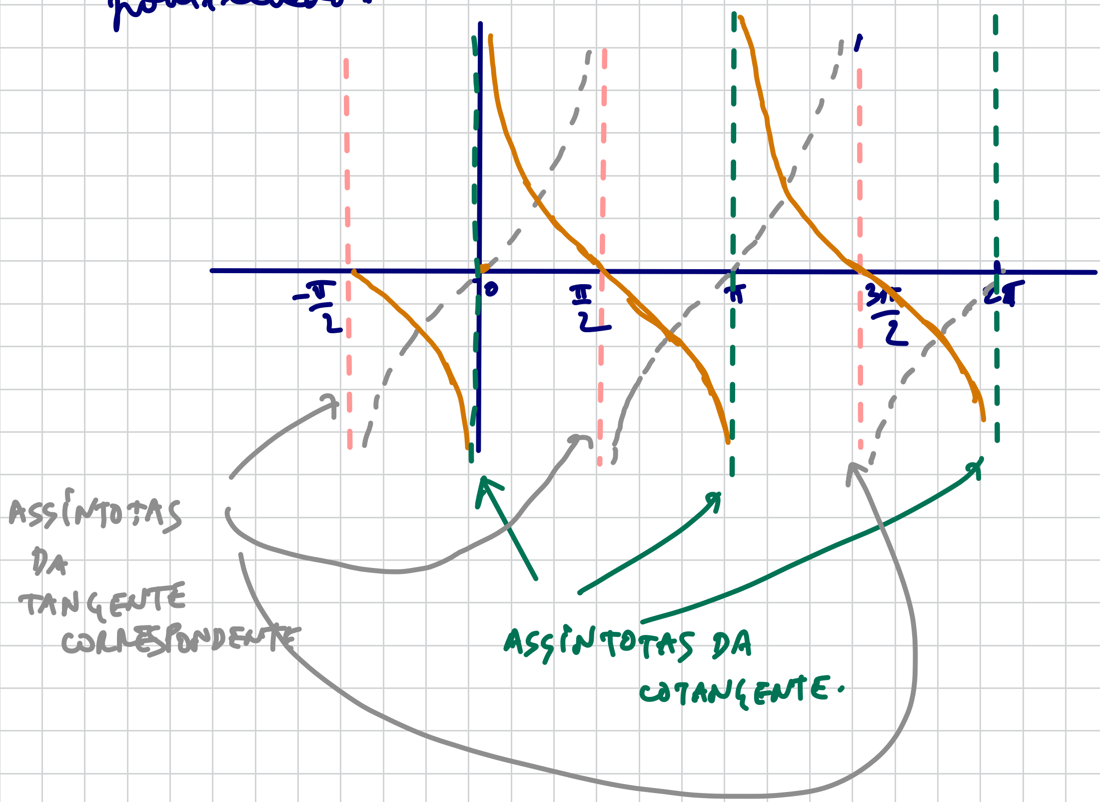
Da mesma forma que as funções secante e cossecante, o esboço gráfico da cotangente é feito tomando o esboço inverso do gráfico da tangente.

Ex.:

01) $y = \cot x$. gráfico? $D(f) = ?$

$Im(f) = ?$ $P = ?$

Solução: A função tangente correspondente é $y = \tan x$, cujo esboço gráfico está abaixo, pontilhado.



$D(f) = ?$ $x \neq k\pi$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$Im(f) = \mathbb{R}$. $P = \pi$.

Lista 05 de Exercícios - Funções trigonométricas diretas e inversas

1. Esboçar o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio, imagem e período.

   (a) $f(x) = 1 - \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$
   (b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$
   (c) $f(x) = 2\csc(x - \frac{\pi}{3})$
   (d) $f(x) = 2 - 3\sec(\frac{2\pi}{3} - 2x)$
   (e) $f(x) = 3 - 2\sec(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5})$
   (f) $f(x) = \csc(x - \frac{\pi}{4}) - 2$
   (g) $f(x) = 1 + 2\tan(2x - \frac{\pi}{4})$
   (h) $f(x) = \tan(\pi - x)$
   (i) $f(x) = 2 + \cot(\frac{3\pi}{4} - x)$
   (j) $f(x) = 1 - 2\csc(\frac{2\pi}{3} - 2x)$
   (k) $f(x) = 3 + \csc(x - \frac{\pi}{3})$
   (ℓ) $f(x) = 2 - \sec(x - \frac{\pi}{6})$

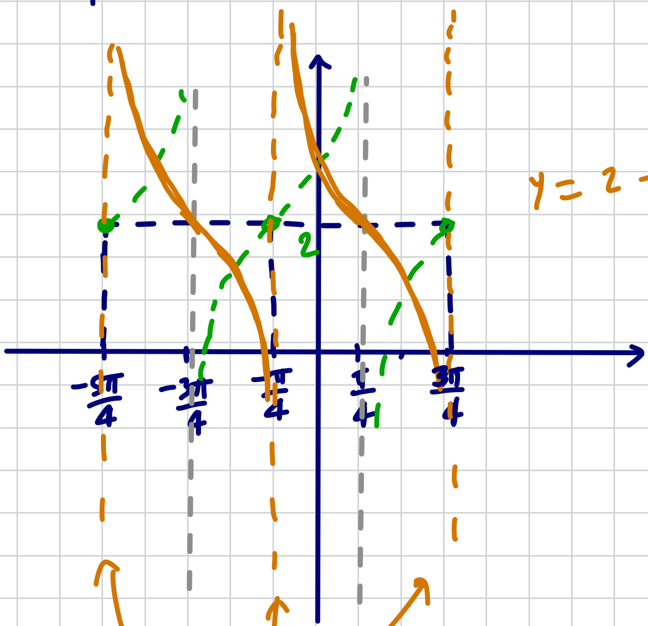
(i) $y = 2 + \cot\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$

1º: considere $y = 2 + \tan\left(\underbrace{\frac{3\pi}{4} - x}_{t}\right)$

Escreva $t = \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} - t$

$y = 2 + \tan t$

t	$y = 2 + \tan t$	$x = \frac{3\pi}{4} - t$
0	2	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$
π	2	$\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$
2π	2	$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$



$y = 2 + \cot\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$

ASSINTOTAS DA COTANGENTE.

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

$D(f) = ?$

$\underbrace{\frac{3\pi}{4} - x}_{\text{este é o arco do exercício.}} \neq k\pi$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} - k\pi \neq x$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} - k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

$$P = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

(j) $y = 1 - 2 \cdot \csc\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

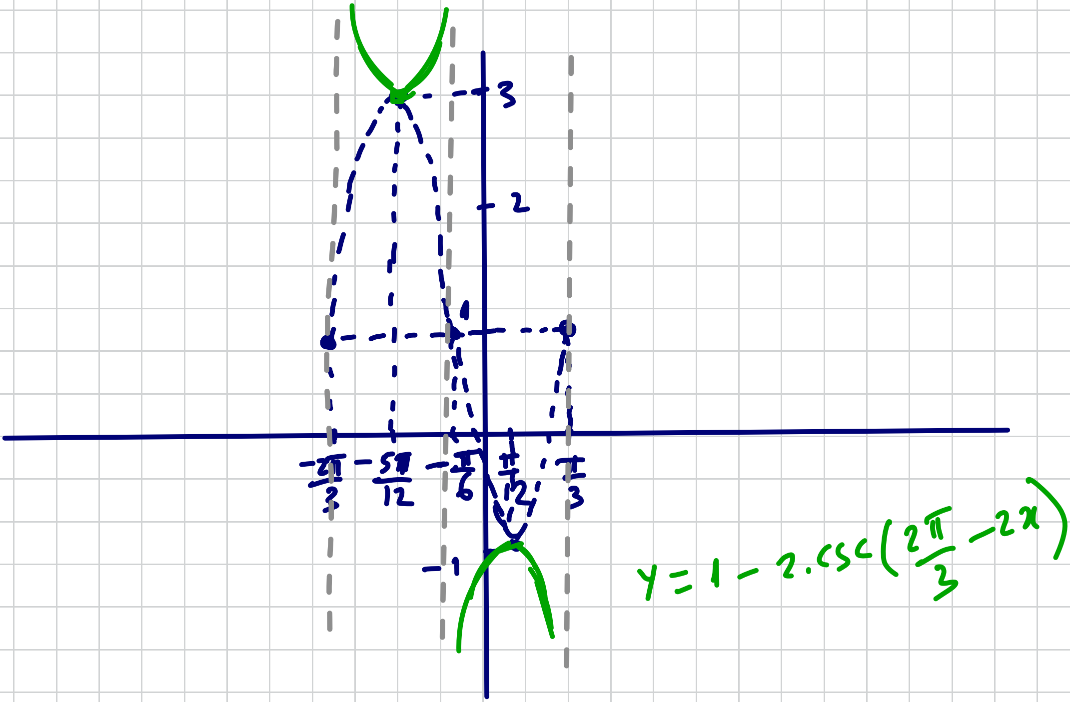
1º: considere $y = 1 - 2 \cdot sen\underbrace{\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}_{t}$

Escreva $t = \frac{2\pi}{3} - 2x$

$$\Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} - t \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{t}{2}$$

Assim, temos: $y = 1 - 2 \cdot sen\, t$

t	$y = 1 - 2 sen\, t$	$x = \frac{\pi}{3} - \frac{t}{2}$
0	1	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2 = -1$	$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$
π	1	$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2.(-1) = 3$	$\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - 9\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12}$
2π	1	$\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$



$D(f) = ?$

$$\frac{2\pi}{3} - 2x \neq k\pi \iff$$

$$\frac{2\pi}{3} - k\pi \neq 2x \iff$$

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{2}}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$P = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \pi$$