CÁLCULO 1A

05/02/26 - AULA 25

Na aula passada vimos outros exemplos de integrais indefinidas, incluindo de funções racionais da forma $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$, onde precisávamos completar quadrado perfeito no denominador.

Vamos ver um tipo diferente, da forma

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}.$$

Ex.: $\displaystyle\int \frac{(5x+3)\,dx}{x^2+4x+9}$?

Nesse caso, como o denominador é um polinômio de grau 2 e o numerador um polinômio de grau 1, usaremos

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

mas para isso, precisamos ajustar o

diferencial du. Faz-se o seguinte:

$$u = x^2+4x+9 \Rightarrow du = (2x+4)\,dx.$$

VAMOS "FORÇAR" SURGIR ESTE POLINÔMIO NO NUMERADOR.

$$\Rightarrow \int \frac{(5x+3)\,dx}{x^2+4x+9} = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+\alpha}{x^2+4x+9}\,.dx =$$

$$\cancel{5x} + \underbrace{10+\alpha}_{=3}$$

$$\alpha = 3-10$$

$$\alpha = -7$$

$$5x+10-7 = 5x+3$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{x^2+4x+9}\,.dx =$$

$$= \frac{5}{2}\underbrace{\int \frac{\overbrace{(2x+4)\,dx}^{du}}{x^2+4x+9}} - 7.\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+9}} =$$

RESOLVE APLICANDO $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$

RESOLVE COMO O EXEMPLO DADO NA AULA PASSADA (COMPLETA QUADRADO)

$$u = x^2+4x+9 \Rightarrow du = (2x+4)\,dx$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \ln|x^2+4x+9| - 7 \cdot \int \frac{dx}{x^2+4x+9} \;\textcircled{=}$$

$$x^2+4x+9 = (x+a)^2+b.$$

$$= x^2+2ax+a^2+b$$

$$\begin{cases} 2a=4 \Rightarrow a=2 \\ a^2+b=9 \end{cases}$$

$$(2)^2+b=9 \Rightarrow b=9-4$$

$$\boxed{b=5}$$

$$\Rightarrow x^2+4x+9 = (x+2)^2+5$$

$$\textcircled{=} \; \frac{5}{2} \ln|x^2+4x+9| - 7 \cdot \int \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$a^2=5$
$\Rightarrow a=\sqrt{5}$

FÓRMULA 19:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$u=x+2 \rightarrow du=dx$$

$$= \frac{5}{2} \ln|x^2+4x+9| - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

02) $$\int \frac{(3x-7)\,dx}{x^2+5x-2} = ?$$

$$u = x^2+5x-2 \Rightarrow du = (2x+5)\,dx$$

$$\int \frac{(3x-7)\,dx}{x^2+5x-2} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)+\alpha}{x^2+5x-2}\,dx =$$

$$3x+\frac{15}{2}+\alpha = 3x-7$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{29}{2}}{x^2+5x-2}\,dx =$$

$$\frac{15}{2}+\alpha = -7$$

$$\alpha = -7-\frac{15}{2}$$

$$\alpha = -\frac{14}{2}-\frac{15}{2}$$

$$\alpha = -\frac{29}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+5x-2} - \frac{29}{2}\int \frac{dx}{x^2+5x-2}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

COMPLETAR QUADRADO PERFEITO.

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+5x-2| - \frac{29}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+5x-2} \;=$$

$$x^2+5x-2 = (x+a)^2+b$$

$$= x^2+2ax+a^2+b$$

$$\begin{cases} 2a=5 \rightarrow a=\frac{5}{2} \\ a^2+b=-2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2+b=-2$$

$$b=-2-\frac{25}{4}$$

$$\boxed{b=-\frac{33}{4}}$$

$$\Rightarrow x^2+5x-2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}$$

Disso, obtemos:

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+5x-2| - \frac{29}{2}\int\underbrace{\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}}}_{\text{USAREMOS A FÓRMULA 20}}$$

$$a = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$u = x + \frac{5}{2} \Rightarrow du = dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+5x-2| - \frac{29}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{33}}{\cancel{2}}} \cdot \ln\left|\frac{x+\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+5x-2| - \frac{29}{2\sqrt{33}} \cdot \ln\left|\frac{\frac{2x+5-\sqrt{33}}{\cancel{2}}}{\frac{2x+5+\sqrt{33}}{\cancel{2}}}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+5x-2| - \frac{29}{2\sqrt{33}} \cdot \ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right| + c$$

NOÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO)

Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas. Por exemplo:

$$x^2 - 3x + y'' = y' + 2$$

é uma equação diferencial pois envolve derivadas (derivada primeira y' e derivada segunda y'', no exemplo acima).

Chamamos de <u>ordem</u> de uma equação diferencial a derivada mais alta presente na mesma.

O exemplo acima é de uma equação diferencial de segunda ordem, pois a derivada mais alta presente nela é a derivada segunda.

Outros exemplos:

(a) $y + y''' - xy' = 0$ – eq. diferencial de ordem 3

(b) $xy - y' = 0$ – eq. diferencial de ordem 1.

(c) $y' + y'' + y''' = 1$ – eq. diferencial de ordem 3

Chama uma solução de uma equação diferencial toda função na qual ela e suas derivadas satisfazem a equação diferencial dada.

Ex: Verifique se

$$y(x) = c_1 . \operatorname{sen} 2x + c_2 . \cos 2x$$

é solução da equação diferencial

$$y'' + 4y = 0.$$

Solução: precisamos obter y''.

$$y = c_1 . \operatorname{sen} 2x + c_2 . \cos 2x .$$

$$y' = c_1 . 2 . \cos 2x + c_2 . (-2 . \operatorname{sen} 2x)$$

$$y' = 2c_1 \cdot \cos 2x - 2c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x.$$

$$\Rightarrow \quad y'' = 2c_1 \cdot (-2 \operatorname{sen} 2x) - 2c_2 \cdot 2 \cdot \cos 2x$$

$$\boxed{y'' = -4c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cdot \cos 2x.}$$

Verificando a eq. diferencial $y'' + 4y = 0$:

$$y'' + 4y = -4c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cdot \cos 2x + 4 \cdot \overbrace{(c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x)}$$

$$= \cancel{-4c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x} \cancel{-4c_2 \cdot \cos 2x} + \cancel{4c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x} + \cancel{4c_2 \cdot \cos 2x} =$$

$$= 0.$$

Ou seja, verificou a eq. diferencial.

Portanto,

$y = c_1 \cdot \operatorname{sen} 2x + c_2 \cdot \cos 2x$ é solução da eq. diferencial ordinária $y'' + 4y = 0$

Como é um estudo introdutório, estudaremos apenas as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, ou seja, aquelas que apresentam apenas a derivada primeira.

Por exemplo:

$$y' = x^2.$$

Qual a sua solução?

Ou seja, estamos perguntando qual a função cuja derivada é x^2.

Será $\dfrac{x^3}{3} + C$, pois

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \cancel{3} \cdot \frac{x^2}{\cancel{3}} + 0 = x^2$$

Resumindo, para encontrar uma solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem, precisamos integrar, usando a técnica de <u>separação de variáveis</u>, como segue:

$$y' = x^2$$ (EDO de 1ª ordem)

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$dy = x^2 dx$$. Integrando:

$$\Rightarrow \int dy = \int x^2 dx$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{3} + C}$$ solução GERAL da EDO dada

pois tem constante C.

Outro exemplo:

LISTA 07 QUESTÃO 05, item (b).

resolver a EDO:

$$y' = \frac{x + \sqrt{x}}{y - \sqrt{y}}.$$

solução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x}}{y - \sqrt{y}}$$

$$(y - \sqrt{y})\, dy = (x + \sqrt{x})\, dx$$

$$\int (y - \sqrt{y})\, dy = \int (x + \sqrt{x})\, dx$$

$$\int y\, dy - \int y^{\frac{1}{2}}\, dy = \int x\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_2$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \underbrace{c_2 - c_1}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C}$$