CÁLCULO 1A

$\boxed{12/02/26 - \text{Aula } 27}$

O exercício do final da aula passada:

$$\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{2x-1}\,dx = \int_{-1}^{3} (2x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

I.I: $\int (2x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx.$

$$\boxed{\int u^k\,du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + c}$$

$$u = 2x-1 \Rightarrow du = 2\,dx$$

$$\boxed{dx = \frac{du}{2}}$$

Assim, obtemos:

$$\int \underbrace{(2x-1)}_{u}^{\frac{1}{3}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{2}} = \int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{du}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdot u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8}\,u^{\frac{4}{3}} + c.$$

$$= \frac{3}{8}\cdot (2x-1)^{\frac{4}{3}} + c$$

$2\text{-}a$:

$$\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{2x-1}\, dx = \frac{3}{8}(2x-1)^{4/3} \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{3}{8}(2.(3)-1)^{4/3} - \frac{3}{8}(2.(-1)-1)^{4/3}$$

$$= \frac{3}{8}(5)^{4/3} - \frac{3}{8}(-3)^{4/3} =$$

$$= \frac{3}{8}\left[5^{4/3} - (-3)^{4/3}\right]$$

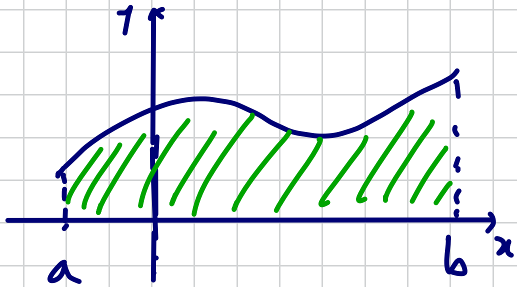
$$= \frac{3}{8} \cdot \left[\sqrt[3]{5^4} - \sqrt[3]{(-3)^4}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}\cdot 5} - \sqrt[\cancel{3}]{\underbrace{(-1)^4}_{1}\cdot 3^{\cancel{3}}\cdot 3}\right]$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \left[5\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{3}\right]$$

ÁREAS.

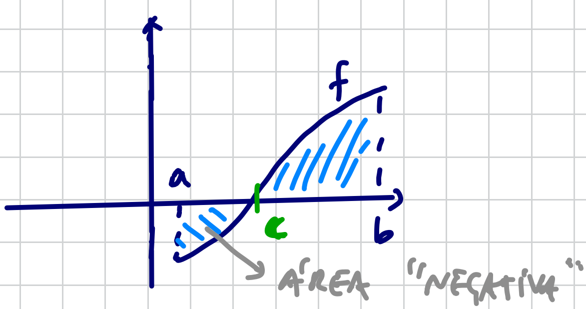
Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo $[a,b]$. Inicialmente assuma que $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$.



A área abaixo do gráfico de f em $[a,b]$ será dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Se f não for positiva em parte de $[a,b]$, devemos assumir o valor absoluto (módulo) nessa parte.



A área da ilustração acima fica dada por:

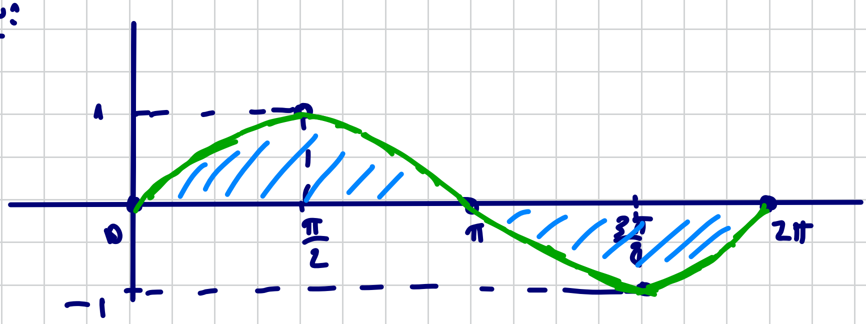
$$A = A_1 + A_2, \text{ onde}$$

$$A_1 = \int_a^c |f(x)|\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^c f(x)dx \text{ e toma positivo.}$$

$$\text{e} \quad A_2 = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ex.: Obter a área de $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solução:



Note que se calcularmos direto $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

não vamos encontrar a área, pois a parte no intervalo $[0,\pi]$ é positiva (dará área positiva) e a parte no intervalo $[\pi, 2\pi]$ é negativa (e então dará uma área "negativa").

Portanto, faz-se:

$$A = |A_1| + |A_2| \quad , \text{ onde}$$

$$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos 2\pi) - (-\cos\pi) =$$

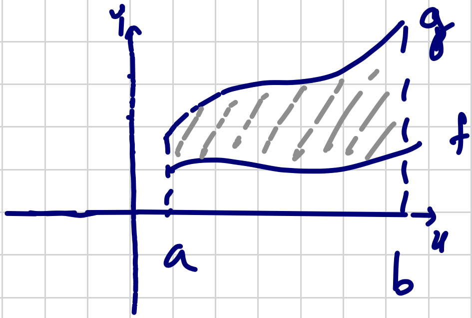
$$= -1 - (-(-1)) = -2$$

Então:

$$A = |A_1| + |A_2| = 2 + |-2| = \underline{\underline{4}}$$

ÁREA ENTRE CURVAS:

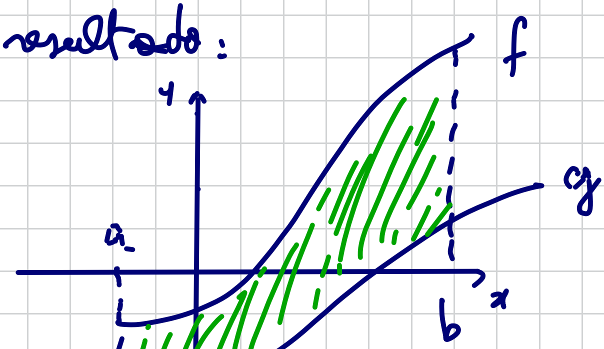
Sejam f, g definidas em [a,b], com $f(x) \leq g(x)$.



A área da região R limitada pelas duas curvas será dada por:

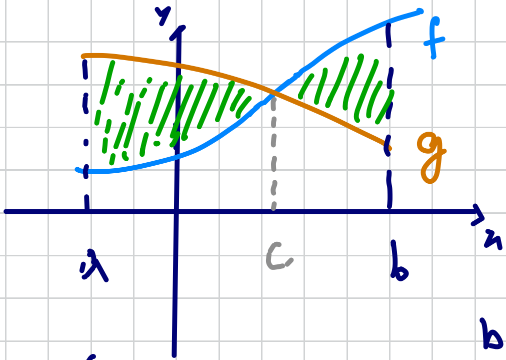
$$A = \int_a^b g(x) - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

E, se passar abaixo do eixo x fica o mesmo resultado:



$$A = \int_a^b (f(x) - f(x))dx.$$

Se as curvas se entrelaçam:

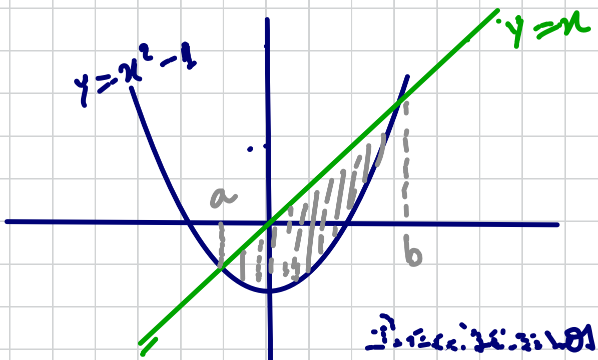


$$A = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Vejamos um exemplo de aplicação:

Ex1) Encontre a área entre as curvas $y = x$ e $y = x^2 - 1$.

<u>Solução</u>: Esboço gráfico:



Precisamos achar os interceptos para fornecer os limites de integração.

interceptos: quando $f(x) = g(x)$; onde $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$.

$$x = x^2 - 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a área será:

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x - (x^2 - 1))\,dx =$$

$$= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x - x^2 - 1)\,dx.$$

1º: $\int (x - x^2 - 1)\,dx = \int x\,dx - \int x^2\,dx - \int dx$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x + C$$

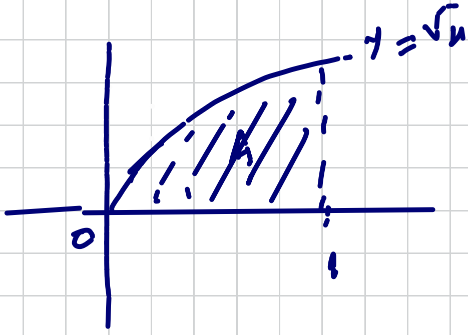
$\underline{\underline{2^o:}}$

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x - x^2 - 1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \ldots$$

---

02) Encontre a área abaixo de $y = \sqrt{x}$ no intervalo $[0,1]$.

<u>solução.</u> $y = \sqrt{x} \iff x = y^2$



$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$\underline{\underline{1^{\underline{o}}}}$: $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

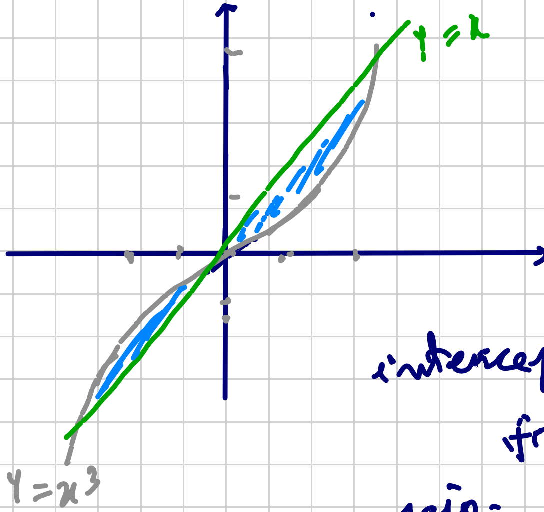
$\underline{\underline{2^{\underline{o}}}}$:

$$A = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(1)^3} - \underbrace{\frac{2}{3}\sqrt{0^3}}_{=0} = \frac{2}{3} //$$

03) Encontre a área da região compreendida pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$

Solução: O esboço gráfico fica:



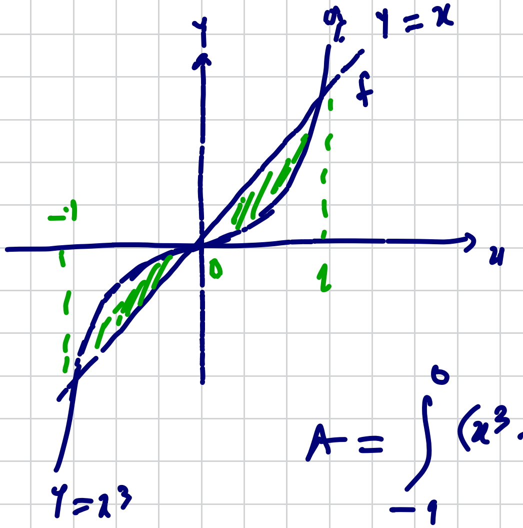
interceptos: quando $f(x) = g(x)$; ou seja:

$$x = x^3$$

$$x - x^3 = 0$$

$$x(1 - x^2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$



$f(x) = x$

$g(x) = x^3$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^3\,dx - \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx - \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} - \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \frac{(-1)^4}{4} - \left[0 - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \frac{(1)^2}{2} - 0 - \left[\frac{(1)^4}{4} - 0\right]$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$