CÁLCULO 1A

03/02/26 – AULA 24

Já vimos várias regras de integração indefinida. Vamos recordar algumas mediante exemplos:

01) $\int \sqrt{4x-7}\,dx = ?$

Ou seja, estamos perguntando qual a função cujo derivada é $y' = \sqrt{4x-7}$?

Para responder a isso precisamos "encaixar" o problema em questão com alguma das fórmulas de integrais indefinidas vistas em aula.

Escreva

$$\int \sqrt{4x-7}\,dx = \int (4x-7)^{\frac{1}{2}}\cdot dx$$

Usaremos $\int r^k \cdot dr = \dfrac{r^{k+1}}{k+1} + C.$

No mesmo caso, temos:

$$\boxed{v = 4x-7}$$

$$\frac{dv}{dx} = 4 \Rightarrow dv = 4 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{dv}{4}}$$

Assim:

$$\int \sqrt{4x-7}\,dx = \int \underbrace{(4x-7)}_{v}^{\frac{1}{2}} \underbrace{dx}_{\frac{dv}{4}} =$$

$$= \int v^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{4} = \frac{1}{4} \int v^{\frac{1}{2}} dv$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot v^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \frac{1}{6} \cdot v^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \cdot (4x-7)^{\frac{3}{2}} + c$$

02) $\int \frac{dx}{5x-8} = ?$

Ou seja, queremos saber qual a função cuja derivada é $y' = \frac{1}{5x-8}$?

Vamos aplicar a fórmula 05 do formulário: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

$$u = 5x-8 \Rightarrow du = 5 \cdot dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{5}}$$

Assim, teremos:

$$\int \frac{dx}{5x-8} = \int \frac{\frac{du}{5}}{u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|5x-8| + C.$$

03) $\int (4x-2)\cdot \operatorname{sen}(x^2-x)\, dx = ?$

Vamos usar a fórmula do formulário:

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c.$$

No nosso caso temos:

$$u = x^2 - x. \Rightarrow du = (2x-1)\,dx$$

Então, teremos:

$$\int (4x-2)\cdot \operatorname{sen}(x^2-x)\, dx =$$

$$\int 2\,(2x-1)\cdot \operatorname{sen}(\underbrace{x^2-x}_{u})\, dx =$$

du

$$= \int 2\cdot \operatorname{sen} u \cdot (du) = 2\cdot \int \operatorname{sen} u \, du =$$

$$= 2\cdot(-\cos u + c) = -2\cos u + c$$

$$= -2\cdot\cos(x^2-x) + c$$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-14} = ?$

Ou seja, qual a função cuja derivada seja $y' = \dfrac{1}{x^2-14}$?

A fórmula 05: $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

é "tentadora" neste exemplo, mas, não vai funcionar; pois neste caso teríamos

$$u = x^2 - 14 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

"SOBRA" VARIÁVEL

isso sinaliza que a fórmula 05 não se aplica neste caso.

Para resolvermos este problema iremos aplicar a fórmula nº 20:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c.$$

No nosso caso, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2-14} \quad \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ a^2 = 14 \Rightarrow a = \sqrt{14} \end{array} \right.$$

Assim, teremos:

$$\int \frac{dx}{x^2-14} = \frac{1}{2.\sqrt{14}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{14}}{x+\sqrt{14}} \right| + c$$

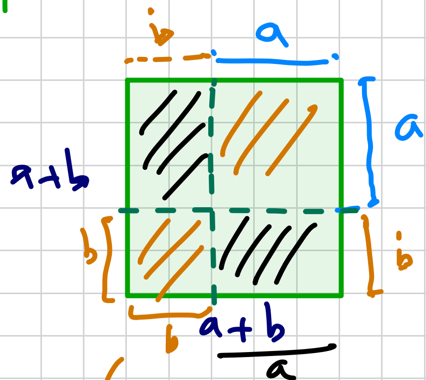
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+5}$.

Usaremos ou a fórmula 19 ou, a fórmula 20. Para saber qual precisamos completar um quadrado perfeito do denominador.

$$x^2-x+5 = (x+a)^2 + b.$$

obs.: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

IDEIA GEOMÉTRICA: área de um quadrado de lados $a+b$:



área: $(a+b)^2$

↳ área: $a^2 + b^2 + a \cdot b + a \cdot b$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Voltando ao problema de completar um quadrado perfeito:

$$x^2 - x + 5 = (x+a)^2 + b$$

$$x^2 - x + 5 = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

$$\begin{cases} 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b = 5 \Rightarrow b = 5 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{20-1}{4}$$

$$\boxed{b = \frac{19}{4}}$$

Assim, obtemos:

$$x^2 - x + 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 5} = \int \frac{dx}{\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{u}^2 + \frac{19}{4}}$$

Escrevendo $u = x - \frac{1}{2}$, temos $\underline{\underline{du = 1dx}}$,

(o diferencial está completo)

temos:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 5} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2} =$$

$$a = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}} \cdot \arctan\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \arctan\left(\frac{\frac{2x-1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{19}}{\cancel{2}}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right) + c.$$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}} = ?$

Uma "tentativa" seria pensar:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}} = \int (x^2+x-1)^{-\frac{1}{2}} dx \,;$$

Mas $\displaystyle\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

não serve, pois neste caso,

teríamos $u = x^2+x-1 \Rightarrow du = \underbrace{(2x+1)}\,dx$

FALTA VARIÁVEL NO DIFERENCIAL.

Usaremos ou a fórmula 21, ou 22, ou 23:

para decidir precisamos completar um quadrado perfeito:

$$x^2 + x - 1 = (x+a)^2 + b$$
$$= x^2 + 2ax + a^2 + b$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \longrightarrow a = \frac{1}{2} \\ a^2 + b = -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b = -1$$

$$b = -1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{4}}$$

Assim:

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Disso, tem-se:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}$$

Escrevendo $u = x + \frac{1}{2}$, teremos $du = dx$

e $a^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, obtemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

FÓRMULA 22

$$= \ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}_{= x^2+x-1}} \right| + C$$

$$= \ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x-1} \right| + C$$