ÁLGEBRA LINEAR I

19/02/26 – AULA 29

Na aula passada iniciamos o estudo de autovalores e autovetores.

Dada uma transformação linear $T: V \to V$ (ou seja, um operador linear), dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor se existir um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda . \vec{v}$.

Neste caso, $\vec{v} \in V$ chama-se um autovetor associado ao autovalor λ.

PROCEDIMENTO GERAL PARA OBTENÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES:

Seja $T: V \to V$ um operador linear, com $\lambda \neq 0$ um autovalor associado ao autovetor $\vec{v} \in V$.

Assim, tem-se que

$$T(\vec{v}) = \lambda . \vec{v}$$

Então,

$$T(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0} \qquad (*)$$

Seja $[T]$ a representação matricial de T nas bases canônicas de V.

Então: $T(\vec{v}) = [T].[\vec{v}]$

Ou seja,

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ - & - - - & - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Disso, representando (*) na notação matricial, temos:

$$T(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0} \iff$$

$$[T].[\vec{v}] - \lambda[\vec{v}] = \vec{0}$$

$$([T] - \lambda.I)[\vec{v}] = \vec{0} \qquad (**)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ - & - - - & - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima produz um sistema linear homogêneo nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. E este sistema, conforme a regra de Cramer, possui infinitas soluções se, e somente se, o seu determinante for zero; ou seja, se, e só se:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

subtrai λ na diagonal

Ou seja, se, e somente se,

$$\det([T] - \lambda I) = 0$$

Isto fornece um polinômio na variável λ, chamado de POLINÔMIO CARACTERÍSTICO:

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I)$$

As raízes desse polinômio serão os autovalores de $T: V \to V$. Os autovetores correspondentes serão dados pela igualdade (**).

Vejamos um exemplo de aplicação desse procedimento geral:

Ex.: Determine os autovalores e autovetores de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (4x+z\,,\ 2x+3y+2z,\ x+4z)$$

Solução: A matriz de T nas bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$([T] - \underset{\text{AUTOVALOR}}{\lambda} I) \cdot \underset{\text{AUTOVETOR}}{\vec{v}} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico será:

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4-\lambda & 0 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 & 2 & 3-\lambda \\ 1 & 0 & 4-\lambda & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$p(\lambda) = (4-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) + 0 + 0 - (3-\lambda) - 0 - 0$$

$$p(\lambda) = (4-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda) \cdot \left[(4-\lambda)^2 - 1 \right]$$

As raízes desse polinômio serão os autovalores, ou seja, precisamos resolver a equação

$$p(\lambda) = 0$$ [chamada de equação característica]

$$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\left[(4-\lambda)^2-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\lambda=0 & \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1=3} \\ (4-\lambda)^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 16-8\lambda+\lambda^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-8\lambda+15=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{8+2}{2}=5 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=5}$$

$$\lambda_3=\frac{8-2}{2}=3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3=3}$$

Obtemos dois autovalores: $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=5$

λ_3 "

Autovetores associados:

- $\lambda_1=3$:

$$([T]-\lambda_1 I).\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda_1 & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 0 & 1 \\ 2 & 3-3 & 2 \\ 1 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \boxed{x = -z}$$

Os vetores associados a $\lambda_1 = 3$ são da forma

$$\{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Ou seja, obtemos o <u>AUTOESPAÇO</u>:

$$V_{\lambda_1} = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -x) + (0, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x.(1, 0, -1) + y.(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(1, 0, -1); (0, 1, 0)].$$

(ou seja, cada autovalor gera um subespaço vetorial)

- $\lambda_2 = 5$:

$$([T] - \lambda_2 . I) \vec{x} = \vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda_2 & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 0 & 1 \\ 2 & 3-5 & 2 \\ 1 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$\to$ mesma equação.

$x = z$

$$2x - y + 2z = 0$$

$$2z - y + 2z = 0$$

$$y = 4z$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$ são da forma

$$(x, y, z) = (z, 4z, z).$$

Portanto, obtemos o autoespaço

$$V_{\lambda_2} = \{(z, 4z, z) : z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{ z\cdot(1,4,1) : z \in \mathbb{R} \} = [(1,4,1)].$$

AUTOVALORES DE MATRIZES:

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, o procedimento para obter autovalores e autovetores é o mesmo. Ou seja, faz-se:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \qquad (I)$$

polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

A equação característica $p(\lambda) = 0$ fornece os autovalores. Levando-os para a igualdade (I) obtemos os autovetores correspondentes.

Vejamos um exemplo:

Ex.: Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO: Queremos obter $\vec{v} = (x, y, z)$ tais que

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0};$$

onde

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Assim:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{matrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$p(\lambda) = \lambda^2(-1-\lambda) + 0 + 0 - 4(-1-\lambda) - 0 - 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\right]$$

Assim: $p(\lambda)=0 \iff (-1-\lambda).(\lambda^2-4)=0$

$$\iff \begin{cases} -1-\lambda=0 \rightarrow \boxed{\lambda=-1} \\ \lambda^2-4=0 \\ \quad \hookrightarrow \boxed{\lambda=\pm 2} \end{cases}$$

Obtemos três autovalores:

$\lambda_1=-1$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=-2$.

Autovetores associados:

- $\lambda_1=-1$:

$$(A-\lambda_1 I).\vec{v}=\vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \rightarrow \boxed{x = -2z} \\ 0 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$2.(-2z) + z = 0$

$-3z = 0 \Rightarrow z = 0$

$x = 0$

$y \in \mathbb{R}$

(y é livre)

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ são da forma:

$$(x, y, z) = (0, y, 0);$$

isto é, os autovetores são da forma:

$$V_{\lambda_1} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y.(0, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} = [(0, 1, 0)]$$

- $\lambda_2 = 2$:

$$(A - \lambda_2 I).\vec{v} = \vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1-2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -3y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ mesma eq.

$y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são da forma:

$$V_{\lambda_2} = \{(x,y,z) : x = z \; ; \; y = 0\}$$

$$= \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x.(1,0,1) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(1,0,1)] .$$

- $\lambda_3 = -2$: $(A - \lambda_3 . I)\vec{v} = \vec{0} \iff$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_3 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1-(-2) & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 2.x + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = -2$ são da forma:

$$V_{\lambda_3} = \{(x, y, z) : x = z \text{ e } y = 0\} =$$

$$= \{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{z \cdot (-1, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\} = [(-1, 0, 1)].$$

FIM DO CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR.