ÁLGEBRA LINEAR I

12/02/26 - AULA 28

Na aula passada estudamos a representação matricial da transformação linear.

Vamos apresentar outro exemplo:

Ex.: Seja $T: P_2 \to P_2$ a transformação dada por

$$T(f(t)) = f(1-t) + f'(t).$$

Considere a base $\beta = \{1+t, 1, -t^2\}$ uma base para P_2. Determine a matriz da transformação $[T]_\beta^\beta$.

SOLUÇÃO:

$$\beta = \{\overbrace{1+t}^{\vec{u}_1}, \overbrace{1}^{\vec{u}_2}, -\overbrace{t^2}^{\vec{u}_3}\}$$

$$\beta = \{\underbrace{1+t}_{\vec{w}_1}, \underbrace{1}_{\vec{w}_2}, -\underbrace{t^2}_{\vec{w}_3}\}$$

Precisamos escrever:

$$T(\vec{u}_1) = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3$$

$$T(\vec{u}_2) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3$$

$$T(\vec{u}_3) = a_{13}\vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2 + a_{33}\vec{w}_3 \,;$$

onde: $T(f(t)) = f(1+t) + f'(t)$

- $T(\vec{u}_1) = T(\underbrace{1+t}) = 2+t+1 = 3+t$

$f(t) = 1+t \Rightarrow f'(t) = 1$

$\Rightarrow f(1+t) = 1+(1+t) = 2+t$

- $T(\vec{u}_2) = T(1) = 1+0 = 1.$

$f(t) = 1 \Rightarrow f'(t) = 0$

$f(1+t) = 1$

- $T(\vec{u}_3) = T(\underbrace{-t^2}) = -1-2t-t^2-2t = -1-4t-t^2$

$f(t) = -t^2 \Rightarrow f'(t) = -2t$

$f(1+t) = -(1+t)^2 = -1-2t-t^2$

Assim, teremos:

- $T(\vec{u}_1) = a_{11}.\vec{w}_1 + a_{21}.\vec{w}_2 + a_{31}.\vec{w}_3$

$$3+t = a_{11}.(1+t) + a_{21}.1 + a_{31}.(-t^2)$$

$$3+t = a_{11} + a_{11}.t + a_{21} - a_{31}.t^2$$

$$3+1t = a_{11} + a_{21} + a_{11}.t - a_{31}.t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} = 3 \\ \boxed{a_{11} = 1} \\ -a_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_{31} = 0}$$

$$1 + a_{21} = 3 \Rightarrow \boxed{a_{21} = 2}$$

Do mesmo modo,

- $T(\vec{u}_2) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3$

$$1 = a_{12}.(1+t) + a_{22}.1 + a_{32}.(-t^2)$$

$$1 = a_{12} + a_{22} + a_{12} \cdot t - a_{32} t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{22} = 1 \\ \boxed{a_{12} = 0} \\ -a_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_{32} = 0}$$

$$0 + a_{22} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 1}$$

E, por fim, como

$T(\vec{u}_3) = a_{13} \vec{w}_1 + a_{23} \vec{w}_2 + a_{33} \vec{w}_3$, tem-se:

$$-1 - 4t - t^2 = a_{13} \cdot (1+t) + a_{23} \cdot 1 + a_{33} \cdot (-t^2)$$

$$-1 - 4t - t^2 = a_{13} + a_{23} + a_{13} \cdot t - a_{33} t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} + a_{23} = -1 \\ \boxed{a_{13} = -4} \\ -a_{33} = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{a_{33} = 1}$$

$$-4 + a_{23} = -1$$

$$\boxed{a_{23} = 3}$$

Por fim, obtemos.

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dado um operador linear $T: V \to V$, sendo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, queremos determinar todos os vetores $\vec{v} \in V$ tais que

$$T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}.$$

(ou seja, quais os vetores de V que são levados por T a um múltiplo de si mesmo).

Quando isso acontece dizemos que tais vetores $\vec{v}$ são chamados de AUTOVETORES associados ao escalar $\lambda \neq 0$. E este escalar chama-se AUTOVALOR associado ao autovetor encontrado.

__Ex.:__ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x+y, x-y)$

Perguntamos: será que $\exists\, \lambda \neq 0$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$?

Se existir tal λ será um autovalor e os vetores a ele associados serão os respectivos autovetores. Vejamos:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff$$

$$T(x,y) = \lambda . (x,y) \iff$$

$$(x+y, x-y) = \lambda (x,y) \iff$$

$$(\underline{x+y}, x-y) = (\underline{\lambda x}, \lambda y)$$

$$\iff \begin{cases} x+y = \lambda x \\ x-y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} x - \lambda x + y = 0 \\ x - y - \lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(1-\lambda) + y = 0 \longrightarrow y = x(1-\lambda) \\ x - y(1+\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$x - x(1-\lambda).(1+\lambda) = 0$$

$$x - x(1-\lambda^2) = 0$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + x\lambda^2 = 0$$

$$x\lambda^2 = 0$$

Se $x \neq 0$, então $x\lambda^2 = 0 \underset{\div x}{\Longrightarrow} \lambda = 0$

Mas isto não pode acontecer, pois devemos ter $\lambda \neq 0$. Portanto, de $x\lambda^2 = 0$ segue que $\underline{\underline{x = 0}}$. Assim, nosso problema fica: $\underline{y = 0}$

Ou seja, o único vetor tal que

$T(x,y) = \lambda(x,y)$ será, neste caso, $\vec{v} = (0,0)$; e isso $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

E isto não define autovalor específico.

Vejamos outro exemplo:

02) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x+2y, -x+4y)$.

Vamos determinar autovalores e autovetores, começamos pensando quais os valores $\lambda \neq 0$ terá que $T(\vec{v}) = \lambda . \vec{v}$.

$$T(x,y) = \lambda . (x,y)$$

$$(\underline{x+2y}, \underline{-x+4y}) = (\underline{\lambda x}, \underline{\lambda y})$$

$$\begin{cases} x+2y=\lambda x \\ -x+4y=\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\lambda x+2y=0 \\ -x+4y-\lambda y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(1-\lambda)+2y=0 \\ -x+y(4-\lambda)=0 \end{cases}} \longrightarrow x=y(4-\lambda)$$

(*)

$$y.(4-\lambda)(1-\lambda)+2y=0$$

$$y\left[(4-\lambda)(1-\lambda)+2\right]=0$$

se $y\neq 0$; então

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0$$

$$4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\lambda=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$\lambda_1=3 \quad ; \quad \lambda_2=2$$

Temos, então dois autovalores:

$$\lambda_1=3 \text{ e } \lambda_2=2 .$$

Autovetores associados:

- $\lambda_1 = 3$:

$$T(x,y) = \lambda_1(x,y)$$

$$T(x,y) = 3(x,y) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x(1-\underbrace{\lambda_1}_{3}) + 2y = 0 \\ -x + y(4-\underbrace{\lambda_1}_{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-3) + 2y = 0 \\ -x + y(4-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ -x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = y}, \quad y \neq 0$$

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são da forma $(x,y) = (x,x)$; $x \neq 0$.

Do mesmo modo, para obter os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$, fazemos:

$$T(x,y) = 2.(x,y) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x(1-\lambda_2)+2y=0 \\ -x+y(4-\lambda_2)=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(1-2)+2y=0 \\ -x+y(4-2)=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{x=2y}$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ são da forma $(x,y)=(2y,y)$; $y \neq 0$

De fato, o autovalor $\lambda_1 = 3$ gerou um subespaço da forma

$$V_{\lambda_1} := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x.(1,1) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)].$$

$$V_{\lambda_2} = \{(2y,y) : y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y(2,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(2,1)].$$