ÁLGEBRA LINEAR I

10/02/26 - AULA 27

Na aula passada estudamos isomorfismos e transformações lineares inversíveis.

Iniciamos a resolução de um exercício:

Foi dada $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

$$T(x, y, z) = (x + y - z, x + z, 2y - z)$$

Já mostramos que T é isomorfismo, ou seja, uma transformação linear bijetiva.

Logo, $\exists\ T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversa de T.

E, como T é bijetiva, por corolário T manda base em base.

Assim, considerando, por exemplo $\beta = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$ a base canônica para o domínio $\mathbb{R}^3$, então $\beta' = T(\beta) = \{ T(1,0,0); T(0,1,0); T(0,0,1) \}$

será uma base para $\mathbb{R}^3$ (contradomínio);

onde, sendo $T(x,y,z) = (x+y-z, x+z, 2y-z)$,

temos:

$$T(1,0,0) = (1,1,0);$$

$$T(0,1,0) = (1,0,2);$$

$$\text{e } T(0,0,1) = (-1,1,-1)$$

Assim, $\beta' = \{(1,1,0); (1,0,2); (-1,1,1)\}$

é uma base para o contradomínio $\mathbb{R}^3$.

Como queremos $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (a inversa),

ela será tal que

$$T^{-1}(1,1,0) = (1,0,0)$$

$$T^{-1}(1,0,2) = (0,1,0)$$

$$T^{-1}(-1,1,-1) = (0,0,1)$$

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como β' é uma base para $\mathbb{R}^3$ (espaço contradomínio), segue que

$$(x,y,z) = a\cdot(1,1,0) + b\cdot(1,0,2) + c\cdot(-1,1,-1)$$

(ou seja estamos escrevendo um vetor do contradomínio $\mathbb{R}^3$ para T, mas para T^{-1} é o domínio — como uma comb. linear dos vetores da base β')

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = x \\ a \quad + c = y \longrightarrow a = y - c \\ \quad 2b - c = z \longrightarrow b = \dfrac{z+c}{2} \end{cases}$$

$$a + b - c = x$$

$$y - c + \frac{z+c}{2} - c = x \qquad (\times 2)$$

$$2y - 2c + z + c - 2c = 2x$$

$$-3c = 2x - 2y - z$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{-2x + 2y + z}{3}}$$

Dimo:

$$a = y - c = y - \frac{-2x+2y+z}{3}$$

$$= \frac{3y+2x-2y-z}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2x+y-z}{3}}$$

$$b = \frac{1}{2}\cdot\left(z+c\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{-2x+2y+z}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3z-2x+2y+z}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{4}z-\cancel{2}x+\cancel{2}y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{2z-x+y}{3}}$$

Dimo, tem-se que

$$(x,y,z) = a.(1,1,0)+b.(1,0,2)+c.(-1,1,-1)$$

$$(x,y,z) = \frac{2x+y-z}{3}(1,1,0) + \frac{2z-x+y}{3}(1,0,2) +$$

$$+ \frac{-2x+2y+z}{3}(-1,1,-1)$$

Aplicando T^{-1}, que é linear, vem:

$$T^{-1}(x,y,z) = \frac{2x+y-z}{3}\cdot\underbrace{T^{-1}(1,1,0)}_{(1,0,0)} + \frac{2z-x+y}{3}\cdot\underbrace{T^{-1}(1,0,2)}_{(0,1,0)} +$$

$$+ \frac{-2x+2y+z}{3}\cdot\underbrace{T^{-1}(-1,1,-1)}_{=(0,0,1)}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(x,y,z) = \frac{2x+y-z}{3}\cdot(1,0,0) + \frac{2z-x+y}{3}(0,1,0) +$$

$$+ \frac{2y-2x+z}{3}\cdot(0,0,1)$$

Ou seja, obtemos

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{2z-x+y}{3}, \frac{2y-2x+z}{3}\right)$$

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

Dada uma transformação linear $T: V \to W$, com $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base para V e $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ uma base para W; ou seja, $\dim V = n$ e $\dim W = k$.

Logo, $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ são vetores em W; e como $\gamma = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ é uma base de W, então os vetores $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ devem ser escritos, unicamente, como combinações lineares dos vetores da base γ de W.

Assim, sejam $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, k\}$ escalares tais que

$$T(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \cdot \vec{w}_2 + \dots + a_{k1} \cdot \vec{w}_k$$

$$T(\vec{v}_2) = a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2 + \dots + a_{k2} \vec{w}_k$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{v}_n) = a_{1n} \vec{w}_1 + a_{2n} \vec{w}_2 + \dots + a_{kn} \vec{w}_k .$$

Como escrito acima, considerando as bases β de V e γ de W, os escalares a_{ij} acima são unicamente determinados. Disso, podemos associá-los a uma matriz para representar a transf. linear $T: V \to W$. Ou seja, temos a seguinte definição:

Def.: A matriz $A = (a_{ij})_{k \times m}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix}_{k \times m}$$

associada à transformação $T: V \to W$ acima descrita chama-se MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO LINEAR NAS BASES β e γ, e é denotada por:

$$A = [T]_{\gamma}^{\beta}$$

Obs.: Note que, c.f. definido $[T]^{\beta}_{\gamma}$ é construída como o procedimento descrito na teoria acima, tomando-se as colunas das combinações lineares.

Vamos apresentar alguns exemplos para fixar este conceito.

01) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transf. linear dada por: $T(x,y,z) = (x-y+z, 2x-z)$;

e considere as bases $\beta = \{(1,1,0); (0,1,-1); (1,0,-1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $\gamma = \{(1,2); (0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$.

Encontre a matriz $[T]^{\beta}_{\gamma}$ da transformação

Solução:

$$\beta = \{ \overbrace{(1,1,0)}^{\vec{v}_1} ; \overbrace{(0,1,-1)}^{\vec{v}_2} ; \overbrace{(1,0,-1)}^{\vec{v}_3} \}.$$

$$\gamma = \{ \underbrace{(1,2)}_{\vec{w}_1} ; \underbrace{(0,1)}_{\vec{w}_2} \}$$

$$T(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \vec{w}_2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$T(\vec{v}_2) = a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2 \qquad (\mathrm{II})$$

$$T(\vec{v}_3) = a_{13} \vec{w}_1 + a_{23} \vec{w}_2 \qquad (\mathrm{III})$$

A matriz da transformação será:

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} ;$$

onde:

- pela igualdade (I), temos:

$$T(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x-z)$$

$$T(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \vec{w}_2 \ ; \quad \text{onde:}$$

$$T(\vec{v}_1) = T(1,1,0) = (0,\ 2)$$

Ou seja:

$$(0,2) = T(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot (1,2) + a_{21}(0,1)$$

$$(0,2) = (a_{11},\ 2 \cdot a_{11} + a_{21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a_{11} = 0} \\ 2 \cdot a_{11} + a_{21} = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{a_{21} = 2}$$

De (II), temos: $T(\vec{v}_2) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2$,

onde:

$$T(\vec{v}_2) = T(0,1,-1) = (-1-1,\ 2 \cdot 0 - (-1)) = (-2,1)$$

$$\Rightarrow (-2,1) = T(\vec{v}_2) = a_{12} \cdot (1,2) + a_{22}(0,1)$$

$$(-2,1) = (a_{12},\ 2 \cdot a_{12} + a_{22})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a_{12} = -2} \\ 2 \cdot a_{12} + a_{22} = 1 \end{cases}$$

$$2 \cdot (-2) + a_{22} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 5}$$

De (III), temos

$$T(\vec{v}_3) = a_{13} \cdot \vec{w}_1 + a_{23}\vec{w}_2,$$ onde:

$$T(\vec{m}_3) = T(1,0,-1) = (1-1,\ 2.1-(-1)) = (0,3);$$

$$t(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x-z)$$

ou seja;

$$(0,3) = T(\vec{m}_3) = a_{13}(1,2) + a_{23}(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a_{13} = 0} \\ 2.a_{13} + a_{23} = 3 \end{cases} \rightarrow 2.0 + a_{23} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{23} = 3}$$

Portanto, obtemos:

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

02) Considere a mesma transf. linear do exemplo acima

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; T(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x-z),$$

nas bases canônicas $\beta = \{(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1)\}$ e $\gamma = \{\underbrace{(1,0)}_{\vec{w}_1};\ \underbrace{(0,1)}_{\vec{w}_2}\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Vamos obter a sua matriz da transformação $[T]^{\beta}_{\gamma}$. Neste caso,

$$T(1,0,0) = (1,2)\;;$$

$$T(0,1,0) = (-1,0)\;;$$

$$T(0,0,1) = (1,-1).$$

$$(1,2) = T(1,0,0) = a_{11}.\underbrace{(1,0)}_{\vec{w}_1} + a_{21}\underbrace{(0,1)}_{\vec{w}_2} \quad (\mathrm{I})$$

$$(-1,0) = T(0,1,0) = a_{12}\,(1,0) + a_{22}.(0,1) \quad (\mathrm{II})$$

$$(1,-1) = T(0,0,1) = a_{13}\,(1,0) + a_{23}(0,1) \quad (\mathrm{III})$$

De (I), vem:

$$(1,2) = (a_{11}, a_{21}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 2 \end{cases}$$

De (II), vem:

$$(-1,0) = (a_{12}, a_{22}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

De (III), vem:

$$(1,-1) = (a_{13}, a_{23}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 1 \\ a_{23} = -1 \end{cases}$$

Assim, obtemos:

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Observe que sendo β e γ as respectivas bases canônicas, tem-se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x,y,z) = (x - y + z, 2x - z)$$

Ou seja, quando ambas bases são canônicas basta olhar os coeficientes.

Outro exemplo, sendo $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z, 57x - 3y + 8z)$,

nas bases canônicas do $\mathbb{R}^3$, tem-se:

$$[T]^{\beta = \text{can.}}_{\gamma = \text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 57 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Obs</u>: Quando β e γ são ambas bases canônicas, podemos representar a matriz da transformação por:

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = [T].$$

Se a transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for um isomorfismo, e então $\exists\, T^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sendo $[T]^{\beta}_{\gamma}$ a representação matricial de T;

a representação matricial de T^{-1} será:

$$[T^{-1}]_{\beta}^{\gamma} = \underbrace{\left([T]_{\gamma}^{\beta}\right)^{-1}}$$

OU SEJA A MATRIZ INVERSA DA MATRIZ DA TRANSF. T.