ÁLGEBRA LINEAR I

05/02/26 – AULA 26

ISOMORFISMOS E TRANSFORMAÇÕES INVERSÍVEIS.

Def.: Dizemos que uma transformação $T: V \to W$ é bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva.

Esta definição é para uma transformação $T: V \to W$ geral, ou seja, não necessariamente linear. Quando, além disso, T for linear, definimos:

Def.: Uma transformação linear $T: V \to W$ que é bijetiva chama-se ISOMORFISMO.

Neste caso, dizemos que os espaços vetoriais V e W são ISOMORFOS, e escrevemos $V \simeq W$ para indicar que V é isomorfo a W.

Dois espaços vetoriais V e W isomorfos se comportam de forma similar, no sentido de que um seria uma "tradução" do outro em uma outra "linguagem".

Vejamos exemplos:

01) $\mathbb{R}^3 \sim P_2$, onde P_2 é o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2; i.e.;

$$P_2 = \{ a_0 + a_1 . t + a_2 . t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}.$$

De fato, para mostrar que $\mathbb{R}^3 \sim P_2$, precisamos encontrar uma transformação linear bijetiva $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$

A forma mais simples de fazer isto é definir naturalmente a $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ pondo:

$$T(x, y, z) = x + y . t + z . t^2$$

Precisamos mostrar a linearidade e a bijetividade de T.

AF.01: T é linear:

Dados $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T((x, y, z) + (a, b, c)) =$

$$= T(x+a,\ y+b,\ z+c) =$$

$$= x+a + (y+b).t + (z+c)t^2$$

$$= x + a + yt + b.t + z.t^2 + c.t^2 =$$

$$= \underbrace{(x + yt + zt^2)}_{T(x,y,z)} + \underbrace{(a + bt + c.t^2)}_{T(a,b,c)} =$$

$$= T(x,y,z) + T(a,b,c) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

(ii) $T(\alpha.\vec{u}) = \alpha.T(\vec{u})$:

De fato:

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha.(x,y,z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= \alpha x + (\alpha y).t + (\alpha z)t^2 =$$

$$= \alpha.\left(\underbrace{x + y t + z.t^2}_{T(x,y,z)}\right) = \alpha.T(x,y,z) = \alpha.T(\vec{u}).$$

Logo, T é linear.

AF.02: T é injetiva: De fato, calculando o núcleo de T, vamos obter:

$$\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = 0 \in P_2\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y.t + z.t^2 = 0 + 0t + 0t^2\}$$

Ou seja, ker(T) é a solução linear homogênea:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases};$$

logo, $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$, o que mostra que $T : \mathbb{R}^3 \to P_2$ é injetiva.

AF.03: T é sobrejetiva: De fato, como

$T: \mathbb{R}^3 \to P_2$, com $\dim \mathbb{R}^3 = \dim P_2$,

e sabendo que T é injetiva pela afirmação anterior, segue por corolário que T é sobrejetiva.

da aula passada

Portanto, concluímos que $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$,

$T(x, y, z) = x + yt + zt^2$ é uma transf. linear bijetiva e, portanto, um isomorfismo; ou seja, $\mathbb{R}^3 \simeq P_2$.

02) $\mathbb{R}^4 \simeq M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

De fato, defina

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$ por

$$T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Afirmamos que T é isomorfismo.
De fato, valem as afirmações:

AF-01 : T é linear:

Sejam $\vec{u} = (x,y,z,w)$ e $\vec{v} = (a,b,c,d)$,
e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$:

De fato:

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T((x,y,z,w) + (a,b,c,d))$$

$$= T(x+a,\ y+b,\ z+c,\ w+d)$$

$$= \begin{pmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}}_{T(x,y,z,w)} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{T(a,b,c,d)}$$

$$= T(\underbrace{x,y,z,w}_{\vec{u}}) + T(\underbrace{a,b,c,d}_{\vec{v}}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

(ii) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha . T(\vec{u})$:

De fato:

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha.(x,y,z,w)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha . T(x,y,z,w) = \alpha . T(\vec{u}) .$$

Logo, T e' uma transf. linear.

AF·02: T e' injetiva: Calculando o núcleo de T, teremos:

$$\ker(T) = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} ;$$

ou seja, $Ker(T) = \{(0,0,0,0)\}$

Logo, T é injetiva.

<u>AF 03</u>: T é sobrejetiva. De fato, como, dada $T: \mathbb{R}^4 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ é tal que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim M_{2\times2}(\mathbb{R}) = 4$, e como T é injetiva, por COROLÁRIO segue que T é sobrejetiva.

da aula passada

Pelas afirmações 01, 02 e 03 segue que $T: \mathbb{R}^4 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ é um isomorfismo e, portanto, $\mathbb{R}^4 \sim M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Da mesma forma como se estuda em funções, uma função $f: A \to B$ admite uma inversa $g: B \to A$ se, e só se, f for bijetiva; teremos que uma transformação linear $T: V \to W$ bijetiva possuirá uma inversa $T^{-1}: W \to V$ se, e só se, T for bijetiva. (i.e., se T for isomorfismo)

No que segue, mostraremos que, sendo $T: V \to W$ isomorfismo (e, portanto, inversível), a transformação inversa $T^{-1}: W \to V$ também será linear.

De fato, seja $T: V \to W$ isomorfismo. Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$, existem $\vec{p}, \vec{q} \in W$ tais que

$$T(\vec{u}) = \vec{p}$$
$$T(\vec{v}) = \vec{q}.$$

Seja $T^{-1}: W \to V$ a transformação inversa. Assim, obrigatoriamente, tem-se que

$$T^{-1}(\vec{p}) = \vec{u} \quad e \quad T^{-1}(\vec{q}) = \vec{v}.$$

AF.: T^{-1} é linear:

De facto; como T é linear, temos que

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Então,

- $$T^{-1}(\vec{p}+\vec{q}) = T^{-1}\big(T(\vec{u}) + T(\vec{v})\big) =$$

T é linear

$$= T^{-1}\big(T(\vec{u}+\vec{v})\big) = (T^{-1}\circ T)(\vec{u}+\vec{v}) =$$

$$= \vec{u}+\vec{v} = T^{-1}(\vec{p}) + T^{-1}(q).$$

Do estudo de funções: a composição de uma função com a sua inversa dá a identidade: $(f\circ f^{-1})(x) = x$

- $T^{-1}(\alpha\vec{p}) = T^{-1}(\alpha \cdot T(u)) = T^{-1}(T(\alpha\vec{u}))$

T é linear

$= (T^{-1} \circ T)(\alpha\vec{u}) = \alpha\vec{u} = \alpha \cdot T^{-1}(\vec{p})$

Ou seja, uma transformação inversa (de um isomorfismo) também é linear.

Vejamos um exemplo:

Ex.: Mostre que a transformação

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$T(x,y,z) = (x+y-z, x+z, 2y-z)$

é um isomorfismo.

Em seguida, obtenha a transformação inversa $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

solução: $T(x,y,z) = (x+y-z,\ x+z,\ 2y-z)$

AF. 01: T é linear:

Dados $\vec{u} = (x,y,z)$ e $\vec{v} = (a,b,c)$,
e sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- $T(\vec{u}+\vec{v}) = T((x,y,z)+(a,b,c)) =$

$$= T(x+a,\ y+b,\ z+c) =$$

$$= (x+a+y+b-z-c,\ x+a+z+c,\ 2.(y+b)-z-c)$$

$$= (x+a+y+b-z-c,\ x+a+z+c,\ 2y+2b-z-c)$$

$$= \underbrace{(x+y-z,\ x+z,\ 2y-z)}_{T(x,y,z)} + \underbrace{(a+b-c,\ a+c,\ 2b-c)}_{T(a,b,c)}$$

$$= T(x,y,z) + T(a,b,c) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

- $T(\alpha \vec{u}) = \alpha . T(\vec{u})$:

De fato:

$$T(\alpha \vec{u}) = T(\alpha . (x, y, z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha x + \alpha z, 2\alpha y - \alpha z)$$

$$= (\alpha (x + y - z), \alpha (x + z), \alpha (2y - z))$$

$$= \alpha (x + y - z, x + z, 2y - z)$$

$$= \alpha . T(x, y, z) = \alpha . T(\vec{u})$$

Portanto, T é linear.

AF-02: T é injetiva:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y - z, x + z, 2y - z) = (0, 0, 0)\},$$

ou seja $\ker(T)$ é a solução do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \quad \to \quad x = -z \\ 2y - z = 0 \quad \to \quad y = \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$-z - \frac{z}{2} - z = 0$$

$$-\frac{5}{2} z = 0 \iff \boxed{z = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x = 0} \text{ e } \underline{y = 0}$$

Portanto, $Ker(T) = \{(0,0,0)\}$; ou seja, T é injetiva.

<u>A.F.03</u>: T é sobrejetiva: de fato, como $\underset{V}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{T} \underset{W}{\mathbb{R}^3}$, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($\dim V = \dim W$), e T é injetiva, segue por corolário que T é sobrejetiva.

Portanto, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(x,y,z) = (x+y-z,\ x+z,\ 2y-z)$$

é um isomorfismo.

Logo, $\exists\ T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversa de T.

E, como T é bijetiva, por corolário T manda base em base.

Assim, considerando, por exemplo $\beta = \{(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1)\}$ a base canônica para o domínio $\mathbb{R}^3$,

então $T(\beta) = \{T(1,0,0);\ T(0,1,0);\ T(0,0,1)\}$ será uma base para $\mathbb{R}^3$ (contradomínio)

(....)

(... NÃO DEU TEMPO... CONTINUAREMOS NA PRÓXIMA AULA...)