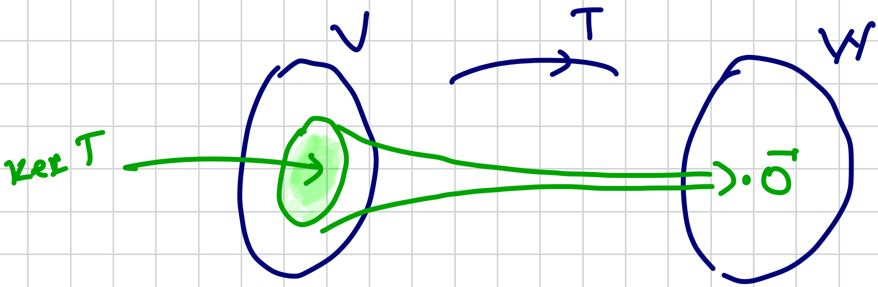
ÁLGEBRA LINEAR I

03/02/25 - AULA 25

Na última aula estudamos o conceito de núcleo de uma transformação linear:

Dado $T: V \to W$ transformação linear,

$$\ker(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$



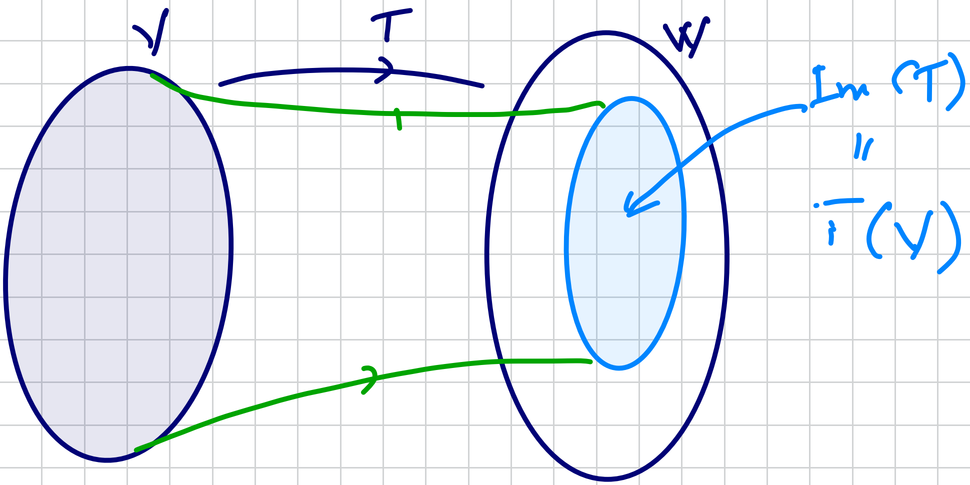
Vimos também que $\ker(T)$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial V, e que:

$$T: V \to W \text{ é injetiva} \iff \ker(T) = \{\vec{0}\}$$

Similarmente ao que definimos e estudamos para o núcleo de uma transformação linear, o faremos para estudar a imagem de uma transformação linear.

Def: Seja $T: V \to W$ uma transf. linear. Definimos a imagem de T por:

$$Im(T) = \{ \vec{w} \in W : \exists \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{w} \}$$



Note que $Im(T) \subset W$. Mais do que isso, vale o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: Seja $T: V \to W$ uma transf. linear. Então, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

DEMONSTR.: Seja $T: V \to W$ transf. linear

A mostrar:

$Im(T)$ é subespaço vetorial de W.

Ou seja, dados $\vec{v}, \vec{w} \in Im(T)$, precisamos mostrar que:

(i) $\vec{v} + \vec{w} \in Im(T)$;

(ii) $\alpha . \vec{v} \in Im(T)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Como $\vec{v}, \vec{w} \in Im(T)$, então, $\exists\, \vec{x}, \vec{y} \in V$ tais que

$$T(\vec{x}) = \vec{v} \quad \text{e}$$

$$T(\vec{y}) = \vec{w}.$$

Disso, segue que:

- $\vec{v} + \vec{w} = T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = T(\underbrace{\vec{x} + \vec{y}}_{\in V}) \in Im(T).$

pois T é linear

- $\alpha . \vec{v} = \alpha . T(\vec{x}) = T(\underbrace{\alpha . \vec{x}}_{\in V}) \in Im(T).$

$\square$

Ex: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformação linear dada por

$$T(x,y,z) = (2x-y,\ x+y+z)$$

Determine:

(a) $\ker(T)$ e $\dim \ker T$

(b) $\operatorname{Im}(T)$ e $\dim \operatorname{Im}(T)$

Solução:

(a) $$\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : (2x-y,\ x+y+z) = (0,0)\},$$

ou seja, $\ker(T)$ é a solução do sistema linear homogêneo:

$$+\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{y = 2x}$$

$$3x + z = 0 \implies \boxed{z = -3x}$$

Portanto, $\ker(T)$ é a solução:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = -3x\}$$

$$= \{(x, 2x, -3x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x \cdot (1, 2, -3) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(1, 2, -3)]$$

Como um único vetor não nulo é L.I., segue que o conj. $\{(1, 2, -3)\}$ é uma base para $\ker(T)$, $\therefore$ donde segue que $\dim \ker(T) = 1$.

(b) $\mathrm{Im}(T)$ e sua dimensão?

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(2x - y, x + y + z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(2x, x) + (-y, y) + (0, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(2,1) + y(-1,1) + z\cdot(0,1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(2,1); (-1,1); (0,1)] \subset \mathbb{R}^2;$$

como estes vetores estão no $\mathbb{R}^2$, o conj.: $\{(2,1); (-1,1); (0,1)\}$ é, sem dúvida, L.D.

Por exemplo:

$$(2,1) = a.(-1,1) + b.(0,1)$$

$$\begin{cases} -a = 2 & \rightarrow \boxed{a = -2} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$-2 + b = 1 \rightarrow \boxed{b = 3}$$

Ou seja; $(2,1) = -2.(-1,1) + 3.(0,1)$; assim, este vetor pode ser descartado da lista. Portanto:

$$Im(T) = [(-1,1); (0,1)].$$

E, agora eles serão L.I:

$$a.(-1,1) + b.(0,1) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$b=0$$

Portanto, $\{(-1,1);(0,1)\}$ é uma base para $Im(T)$.

Disso, tem-se que $\dim Im(T) = 2$.

No exemplo acima, temos:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; ;$$

$$T(x,y,z) = (2x-y, \; x+y+z)$$

Vimos que $\dim \ker(T) = 1$

$\dim Im(T) = 2$

Ou seja, nota-se que

$\underbrace{\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T)} = 1+2=3 = \dim V.$

E isso não é uma simples coincidência. Ou seja, vale o seguinte resultado:

TEOREMA (TEOR. DO NÚCLEO E DA IMAGEM):

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então,

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T: V \to W$ linear.

Considere $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ uma base para o núcleo.

Logo, $\dim \ker(T) = k$.

Além disso, temos que $\ker(T) \subset V$ e é um subespaço vetorial de V. Assim, o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ é L.I. em V.

Pelo teorema do completamento, essa

coleção pode ser completada de modo a formar uma base para V. Assim, seja

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$$

este completamento, formando uma base para V.

Disso, segue que

$$\dim V = \underbrace{k}_{\dim \ker(T)} + m = \dim \ker(T) + m$$

Para concluir a prova resta mostrar que

$$\dim Im(T) = m.$$

<u>AFIRMAÇÃO</u>: $\{T(\vec{w}_1), T(\vec{w}_2), \dots, T(\vec{w}_m)\}$ é uma base para $Im(T)$.

De fato, basta mostrar que:

(i) $\{T(\vec{w}_1), \dots, T(\vec{w}_m)\}$ é L.I.;

(ii) $[T(\vec{w}_1), \dots, T(\vec{w}_m)] = Im(T)$.

Vejamos cada item:

(i) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

(*) $$\boxed{\alpha_1 T(\vec{w}_1) + \alpha_2 T(\vec{w}_2) + \dots + \alpha_m T(\vec{w}_m) = \vec{0}.}$$

Como T é uma transformação linear, segue que:

$$T(\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \dots + \alpha_m \vec{w}_m) = \vec{0}.$$

Disso, tem-se que

$$\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \dots + \alpha_m \vec{w}_m \in \ker(T).$$

Como o conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ é base para o núcleo de T, segue que $\exists\, \theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \vec{w}_1 + \dots + \alpha_m \vec{w}_m = \theta_1 \vec{v}_1 + \theta_2 \vec{v}_2 + \dots + \theta_k \vec{v}_k.$$

$$\Rightarrow \theta_1 \vec{v}_1 + \dots + \theta_k \vec{v}_k - \alpha_1 \vec{w}_1 - \dots - \alpha_m \vec{w}_m = \vec{0},$$

e como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ é base de V, segue que eles são L.I.. Assim, da igualdade acima conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_m = 0$. (e os θ's também)

Assim, da igualdade (*), que vale se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$; conclui-se que o conj:

$\{T(\vec{w}_1), \ldots, T(\vec{w}_m)\}$ é L.I., provando (i).

Resta mostrar (ii).

(ii) $[T(\vec{w}_1), T(\vec{w}_2), \ldots, T(\vec{w}_m)] = Im(T)$:

AF.01: $[T(\vec{w}_1), T(\vec{w}_2), \ldots, T(\vec{w}_m)] \subset Im(T)$:

Seja $\vec{u} \in [T(\vec{w}_1), \ldots, T(\vec{w}_m)]$. A mostrar: $\vec{u} \in Im(T)$.

Como $\vec{u} \in [T(\vec{w}_1), \ldots, T(\vec{w}_m)]$, segue que $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 . T(\vec{w}_1) + \alpha_2 . T(\vec{w}_2) + \cdots + \alpha_m T(\vec{w}_m);$$

e pela linearidade de T, segue que

$$\vec{u} = T(\alpha_1 . \vec{w}_1 + \alpha_2 . \vec{w}_2 + \dots + \alpha_m \vec{w}_m) \in Im(T).$$

AFO2: $Im(T) \subset [T(\vec{w}_1); \dots, T(\vec{w}_m)]$.

Dado $\vec{v} \in Im(T)$, vamos mostrar que

$\vec{v} \in [T(\vec{w}_1), \dots, T(\vec{w}_m)]$. De fato; como

$\vec{v} \in Im(T)$, então, $\exists\ \vec{x} \in V$ tal que

$$T(\vec{x}) = \vec{v}\ ; \quad \text{e como}$$

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ é base de V,

tem-se que $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$

tais que

$$\vec{x} = \alpha_1 . \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k + \beta_1 . \vec{w}_1 + \dots + \beta_m \vec{w}_m$$

Aplicando a T, obtemos:

$$\vec{v} = T(\vec{x}) = T(\alpha_1 . \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k + \beta_1 \vec{w}_1 + \dots + \beta_m \vec{w}_m)$$

$$= \alpha_1 . \underbrace{T(\vec{v}_1)}_{=\vec{0}} + \ldots + \alpha_k \underbrace{T(\vec{v}_k)}_{=\vec{0}} + \beta_1 . T(\vec{w}_1) + \ldots + \beta_m . T(\vec{w}_m)$$

T é linear

pois $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \ker(T)$.

$$= \beta_1 . T(\vec{w}_1) + \ldots + \beta_m . T(\vec{w}_m)$$

Ou seja; obtemos que

$$\vec{v} = \beta_1 . T(\vec{w}_1) + \ldots + \beta_m . T(\vec{w}_m) \in [(T(\vec{w}_1), \ldots, T(\vec{w}_m)]$$

Portanto, vale a AF 02.

Pelas afirmações 01 e 02 segue que $\{T(\vec{w}_1), \ldots, T(\vec{w}_m)\}$ é uma base para a $Im(T)$. Assim, $\dim Im(T) = m$.

Conclusão final:

$$\dim V = \dim \ker(T) + m = \dim \ker(T) + \dim Im(T).$$

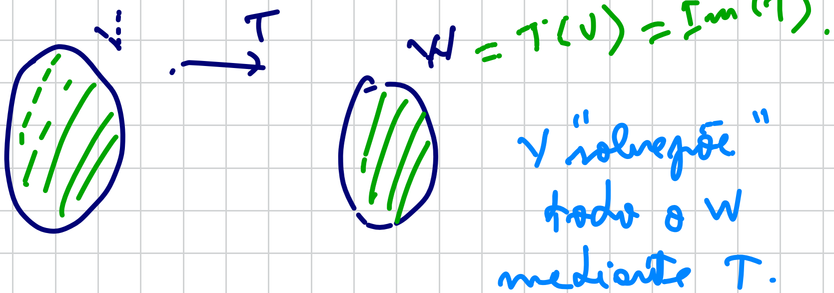
$\square$

Duas consequências desse teorema são os seguintes resultados:

COROLÁRIO 1: Seja $T: V \to W$ uma transf. linear.

Se $\dim V = \dim W$, então T injetiva $\Leftrightarrow$ T sobrejetiva.

Obs.: $T: V \to W$ é sobrejetiva se, e só se, $T(V) = W = \mathrm{Im}(T)$.



COROLÁRIO 2: Seja $T: V \to W$ transf. linear.
Se $\dim V = \dim W$, e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ for uma base de V, então $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_k)\}$ será uma base para W; ou seja, T manda base em base.