

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 10 de Exercícios - Autovalores e autovetores. Diagonalização.
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Determine os autovalores e autovetores associados a cada transformação linear abaixo:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

(c) $T : P_2 \rightarrow P_2$, $T(at^2 + bt + c) = at^2 + ct + b$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

2. Determine os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

3. Se um operador linear $T : V \rightarrow V$ é tal que $\lambda = 0$ é um autovalor associado a T , mostre que o operador T não é inversível.

4. Mostre que uma matriz A e a sua transposta A^t possuem mesmos autovalores.

5. Defina o conjunto $V_\lambda = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$, chamado de *subespaço associado ao autovalor* λ ou *autoespaço* de T . Mostre que V_λ é um subespaço vetorial de V .

6. Os autovalores de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 0)$ os respectivos autovetores. Determine a transformação T , seu núcleo e sua imagem.

7. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizes inversíveis.

(a) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e observe que estes produtos são diferentes.

(b) Encontre os autovalores de $A \cdot B$ e os autovalores de $B \cdot A$. O quê você observa?

(c) Encontre os autovetores de $A \cdot B$ e os autovetores de $B \cdot A$. O quê você observa?

8. (Sel. Mestrado UFSM/2012/2) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (5x - 6y, x)$.

(a) Calcule os autovalores e os autovetores de T .

(b) Exiba uma base para cada um dos autoespaços¹ de T .

9. (Sel. Mestrado UFSM/2010/1) Prove que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Use isso para provar que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e T um operador linear definido sobre V , então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ produzem os mesmos autovalores para α e β bases quaisquer.

¹Um autoespaço V_λ é o conjunto de todos os autovetores associados ao autovalor λ . Veja também a Questão 5.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$. Determine uma base β de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz T do operador seja diagonal. Em seguida, determine a matriz de T nessa base.
11. (Sel. Mestr. UFSM 2017/1) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, com $T(1, -1) = (2, 3)$ e $T(2, 1) = (3, 2)$. Prove que T é diagonalizável.
12. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (-x + 2y, x + y + z, 2x - y + z)$$

- (a) Determine os autovalores e autovetores de T .
- (b) Encontre uma base β na qual a matriz de T seja diagonal.
- (c) Determine $[T]_{\beta}^{\beta}$.
13. Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x, -y, 2x + 2y + 2z)$$

T é diagonalizável? Justifique.

14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + z, x + y + z).$$

Mostre que T é diagonalizável, determinando a base β na qual $[T]_{\beta}^{\beta}$ seja diagonal e a referida matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.

15. Justifique porque a matriz real $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.
16. Idem para a matriz real $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
17. Determine se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável ou não.