Ministério da Educação
Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 1A
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - integrais indefinidas, parte I

1. Mostre que $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$ e $G(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x$ diferem por uma constante, verificando que as suas antiderivadas são iguais.

2. Podemos integrar $\int \sec^2 x \tan x \, dx$ de duas maneiras como segue:

   (a) $\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \tan x(\sec^2 x \, dx) = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$,

   (b) $\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \sec x(\sec x \tan x \, dx) = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$.

   Explique a diferença aparente entre as duas respostas.

3. Encontre as constantes c_1 e c_2 para que $F(x) = c_1 x \sin x + c_2 \cos x$ seja uma antiderivada de $f(x) = x\cos x$.

4. Calcule cada integral indefinida a seguir.

   (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

   (b) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt{1-2x}\right) dx$

   (c) $\int \sqrt{x}(3x-2)dx$

   (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3y}}$

   (e) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx$

   (f) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x}$

   (g) $\int \frac{\sin x \, dx}{1-\cos x}$

   (h) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}} dx$

   (i) $\int \sqrt{x^2+x^4}\, dx$

   (j) $\int e^{2\cos x} \sin x \, dx$

   (k) $\int \cos(3-5x)dx$

   (ℓ) $\int \frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$

5. Chama-se *equação diferencial* uma equação que envolve uma função de uma variável real e pelo menos uma de suas derivadas. Por exemplo, $y' = 3x^2$ é uma equação diferencial de *primeira ordem*, pois a derivada de mais alta ordem é 1. Para resolver esta equação diferencial escrevemos na notação diferencial e separamos a variável independente x da variável dependente y. Assim,

$$y' = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx.$$

   Integrando, obtemos

$$\int dy = \int 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + c.$$

   Portanto, a solução da equação diferencial acima é $y = x^3 + c$.
   Com base nas explicações acima, obtenha a solução geral de cada equação diferencial abaixo.

   (a) $y' = -2xy^2$

   (b) $y' = \frac{x+\sqrt{x}}{y-\sqrt{y}}$

   (c) $y' = \frac{1}{x^2} + x$

   (d) $y'' = 5x^2 + 1$

   (e) $y'' = \sin 3x + \cos 3x$

   (f) $y'' = \tan x \sec^2 x$

6. Ache a solução particular de cada equação diferencial a seguir que satisfaz a condição inicial dada[1].

   (a) $y' = 10x + 5$, $y = 15$ quando $x = 0$.

   (b) $y' = \sqrt{xy}$, $y(9) = 64$.

   (c) $y'' = -\dfrac{3}{x^4}$, $y(1) = \frac{1}{2}$ e $y'(1) = -1$.

   (d) $y' = \cos 3x \csc 2y$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

7. Considere uma dada quantidade de gás que sofre uma expansção ou compressão adiabática, o que significa que nenhum calor é ganho ou perdido durante o processo. O cientista francês Poisson mostrou em 1823 que a pressão e o volume desse gás satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

onde γ é uma constante que depende de o gás ser monoatômico, diatômico, etc. Integre esta equação para obter

$$pV^{\gamma} = c.$$

Esta é a chamada *equação de Poisson para gases* ou *lei adiabática dos gases* e é de importância fundamental em Meteorologia.

8. Admitamos que a pressão atmosférica p esteja relacionada com a altitude h acima do nível do mar pela equação diferencial

$$\frac{dp}{dh} = -cp$$

onde c é uma constante positiva. Se p é $10,3N/m^2$ ao nível do mar e $6,9N/m^2$ a $3048m$, determine a pressão atmosférica, no topo do Monte Everest, onde $h = 9144m$.

9. A velocidade do som no ar a $0°$ (273K, na escala Kelvin) é 1087 pés por segundo, mas a velocidade v aumenta à medida que a temperatura T sobe. Experimentos mostraram que a taxa de variação de v em relação a T é

$$\frac{dv}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}} T^{-\frac{1}{2}}$$

onde v está em pés/s e T está em Kelvin. Ache a fórmula que expressa v como função de T.

10. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?

[1] Ao colocar a condição inicial na resposta obtida determinaremos o valor específico da constante de integração c.