CÁLCULO 1A

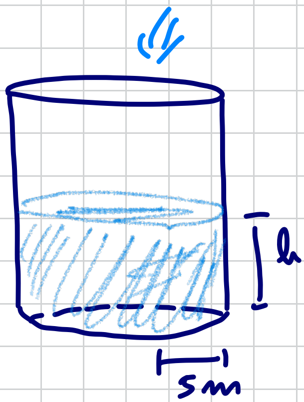
$\boxed{04/12/25 - \text{AULA } 19}$

Na aula passada estudamos problemas envolvendo taxas relacionadas. Vamos ver mais um.

L5

21. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido estará aumentando a altura da água? (Resp. $\frac{3}{25\pi}$ m/min).

Solução:



$$\frac{dV}{dt} = +3\,m^3/min$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

h: altura da coluna de água.

O volume de um cilindro de raio R e altura h é dado por:

$$V = Ab \cdot h$$

$$Ab = \pi R^2$$

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

$$V = \pi (5)^2 \cdot h$$

$$V = 25\pi h.$$

Derivando em relação ao tempo t, obtemos:

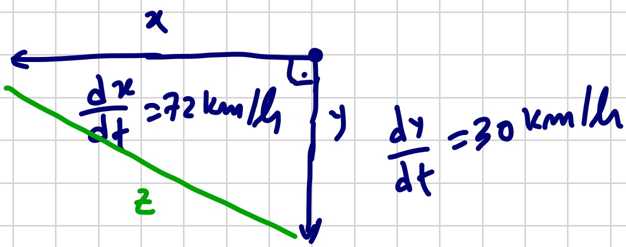
$$\frac{dV}{dt} = 25\pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\overbrace{\frac{dV}{dt}}^{3\, m^3/min}}{25\pi} = \frac{3}{25\pi}\, m^3/min.$$

LS:

17. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro para o oeste a 72 km/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois? (Resp. 78 km/h).

Solução:



$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2h} = ?$$

Pelo teorema de Pitágoras podemos encontrar uma relação entre as três distâncias:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

onde x, y e z são funções do tempo t.

Logo, está definida implicitamente.

Derivando em relação a t (derivação implícita), vamos encontrar:

$$2z \cdot \frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (\div 2)$$

$$z \cdot \frac{dz}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt}}{z}$$

E, como $z^2 = x^2 + y^2$, então:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Daí:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2h} = ?$$

Como $\frac{dx}{dt} = 72\,km/h = \frac{72\,km}{1\,h}$

Então; quando passam 2 horas,

teremos:
$$x = \frac{72\,km}{1\cancel{h}} \times 2\cancel{h}$$
$$x = \underline{144\,km}.$$

Do mesmo modo:

$$\frac{dy}{dt} = 30\,km/h.$$

Então, em 2h; percorrerá:

$$\underline{y} = \frac{30\,km}{1\cancel{h}} \times 2\cancel{h} = \underline{60\,km}$$

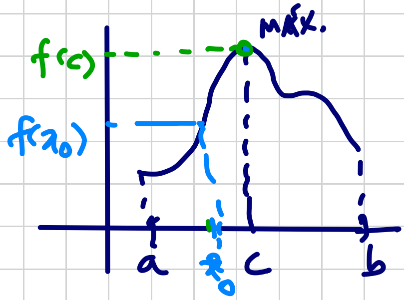
Assim:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2h} = \frac{144 \cdot 72 + 60 \cdot 30}{\sqrt{(144)^2 + (60)^2}}$$

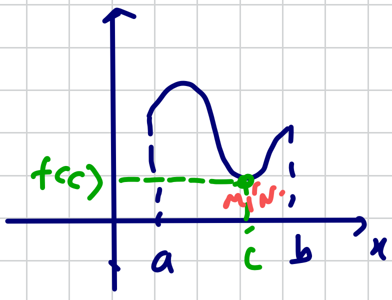
$$= \frac{10368 + 1800}{\sqrt{24336}} = \frac{12168}{156} = \underline{78\,km/h}$$

EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO:

Def.: Dizemos que um ponto $c \in [a,b]$ é um ponto de máximo de uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ se, e só se, $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in [a,b]$.

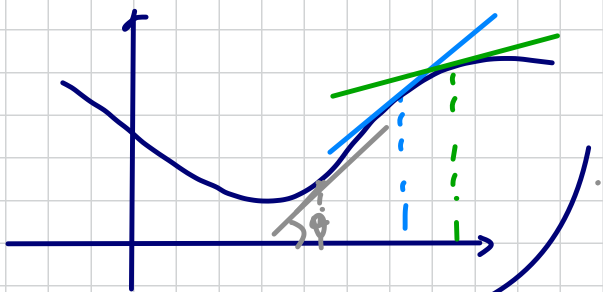


Def.: $c \in [a,b]$ será um ponto de mínimo para $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ se, e só se, $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in [a,b]$.



Suponha que f seja derivável em um intervalo $[a,b]$.

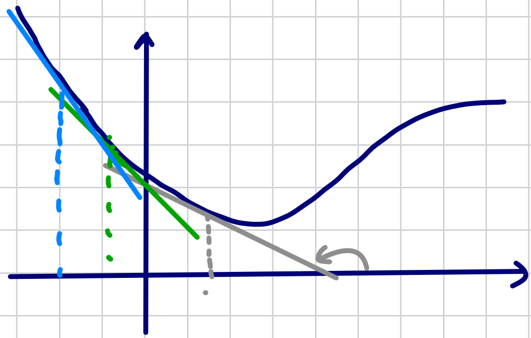
A derivada de uma função em um ponto corresponde, geometricamente, ao coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f naquele ponto. Observe que, se $f'(c) > 0$, então a inclinação é positiva, indicando crescimento, e se $f'(c) < 0$, a inclinação, sendo negativa, indicará decrescimento.



todas as inclinações das tangentes destacadas possuem ângulo $0° < \theta < 90°$; ou seja, no 1º q., onde a tangente é positiva.

Conclusão: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ crescente.

Por outro lado, se a inclinação for negativa:



Ou seja, as inclinações são $90^\circ < \theta < 180^\circ$, i.e., no 2º quadrante; onde $\tan\theta < 0$; i.e;

$f'(x) < 0$.

Conclusão: f é decrescente $\Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Obtemos o seguinte resultado:

Prop.: Se f é derivável, então:

f é crescente $\Leftrightarrow f'(x) > 0$

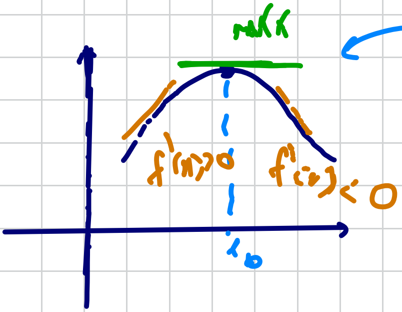
f é decrescente $\Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Def.: Dizemos que c é um ponto crítico de f se $f'(c) = 0$ ou se $\nexists\, f'(c)$.

Os pontos críticos são pontos que poderão ser de MÁXIMO ou de MÍNIMO de uma função.

Para decidir, deve-se estudar o sinal da derivada em torno dos pontos críticos.

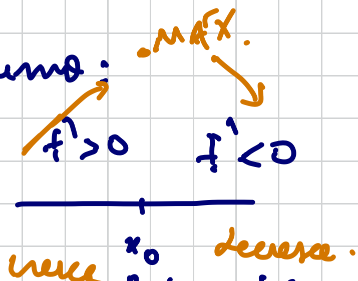
Ex.:



qual a inclinação da reta tangente no ponto de MÁX?
(é zero)

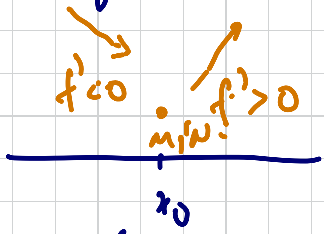
ou seja, $f'(x_0) = 0$

Em resumo:



PONTO CRÍTICO, ONDE $f'(x_0) = 0$ OU $\nexists\, f'(x_0)$

Da mesma forma:



$\left(f'(x_0) = 0 \text{ ou } \nexists f'(x_0) \right)$

EXEMPLOS:

01) $f(x) = x^2 - x^3$.

Obtenha:

(a) pontos críticos.

(b) pontos de máximo e mín. (se existirem)

(c) intervalo de crescimento e decrescimento

SOLUÇÃO:

(a) pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists \cancel{f'(x)}$

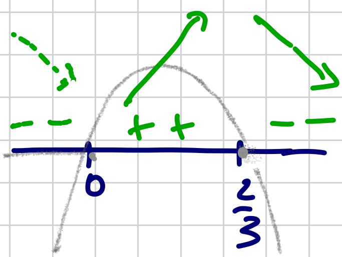
$f'(x) = 2x - 3x^2$

$$f'(x) = 0 \iff 2x - 3x^2 = 0$$
$$\iff x(2-3x) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou}$$
$$2 - 3x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

PONTOS CRÍTICOS: $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$.

(b) e (c):

ESTUDO DO SINAL DA DERIVADA:



$f'(x) = 2x - 3x^2$

(PARÁBOLA)

C.P.B

- f é crescente no intervalo $\left(0, \frac{2}{3}\right)$
- f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

MÁX. $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$; MIN $(0, f(0)) = (0,0)$

02) Encontre, se existirem, os pontos de máx. e mínimo de $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$; determinando intervalos de crescimento e decrescimento.

<u>solução</u>: $f(x) = x^2 - x^{\frac{1}{2}}$. $D(f) = [0, +\infty)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$

$f'(x) = 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ e onde $\nexists f'(x)$.

• $f'(x) = 0 \iff \dfrac{4x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 0$

$\iff 4x\sqrt{x} - 1 = 0$

$\iff 4x\sqrt{x} = 1 \qquad \div 4$

$\iff (x\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\iff x^2 \cdot x = \frac{1}{16}$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow x = 0$ (pois senão teríamos divisão por zero)

PONTOS CRÍTICOS:

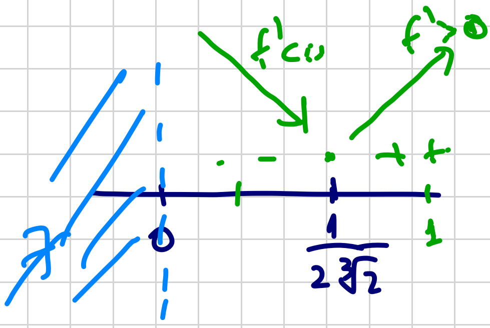
$$x = 0 \quad e \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

- CRESC/DECRESC e pontos MÁX/MÍN:

(estudamos o sinal da derivada)



$$x = 1; \; f'(1) = \frac{4-1}{2} > 0$$

$$x = \frac{1}{100}$$

$$f'\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\frac{4}{100}\sqrt{\frac{1}{100}} - 1}{2\sqrt{\frac{1}{100}}}$$

$$= \frac{\frac{4}{1000} - 1}{20} < 0$$

$$f'(x) = \frac{4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

Portanto, temos que:

- f é crescente no intervalo $\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$
- f é decrescente no intervalo $\left(0, \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)$
- $\exists$ min. $\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, f\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)\right)$