

FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

17/12/25 - AULA 11

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRETAS

FUNÇÃO SENO: chama-se FUNÇÃO SENO a função

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sin x.$$

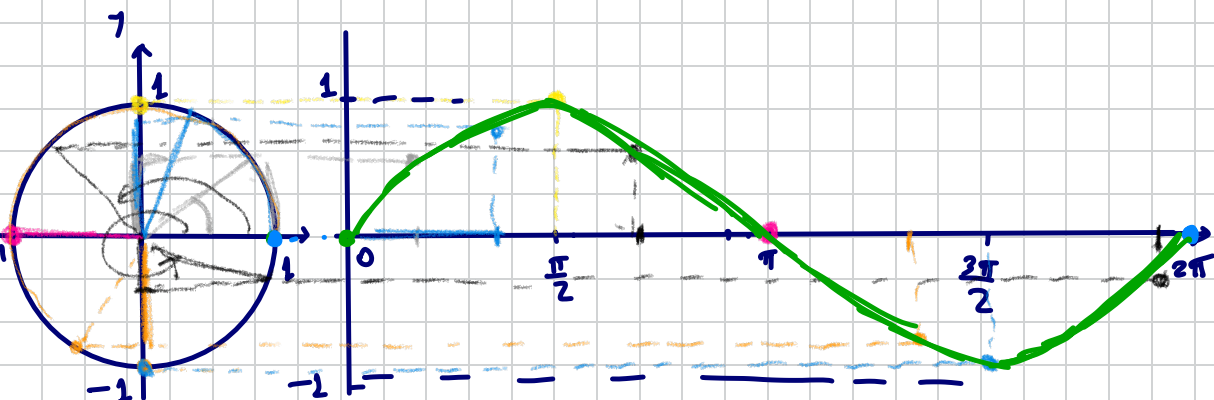
Note que o domínio da função seno é $D(f) = \mathbb{R}$.

E, como, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$-1 \leq \underbrace{\sin x}_{f(x)} \leq 1, \text{ ou seja,}$$

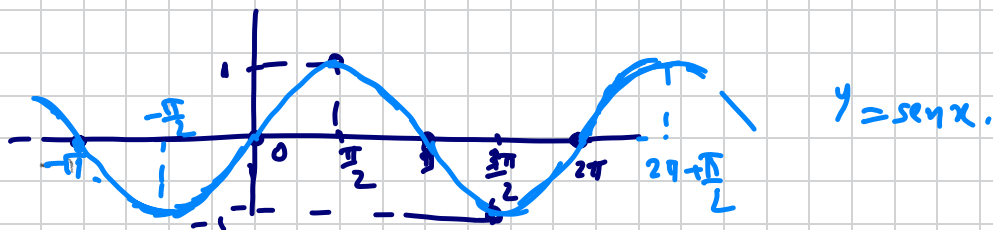
$$-1 \leq f(x) \leq 1 \iff \text{Im}(f) = [-1, 1].$$

Esboço gráfico do seno:



O GRÁFICO DO SENO CHAMA-SE SENÓIDE.

A função seno é PERIÓDICA de período 2π .



Vejam os alguns exemplos:

Esboce o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

(a) $y = 1 + \text{sen } x.$

Na prática, montamos uma tabela observando os valores nas extremidades dos quadrantes, ou seja, em $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π :

x	$y = 1 + \text{sen } x$
0	$1 + \text{sen } 0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$
π	$1 + \text{sen } \pi = 1 + 0 = 1$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 + \text{sen } \frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0$
2π	$1 + \text{sen } 2\pi = 1 + 0 = 1$

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Im}(f) = ?$$



note que:

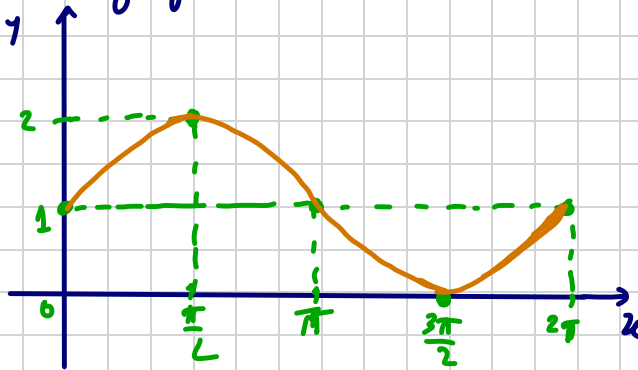
$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad +1:$$

$$1 - 1 \leq \underbrace{1 + \text{sen } x}_{f(x)} \leq 1 + 1$$

$$0 \leq f(x) \leq 2$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = [0, 2]$$

Esboço gráfico:



$P = 2\pi$
 ↑
 período

(b) $y = 1 - 2 \cdot \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}$

$\text{Im}(f) = ?$ Note que; $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1. \quad \times(-2)$$

$$+2 \geq -2 \cdot \sin x \geq -2$$

$\Leftrightarrow$

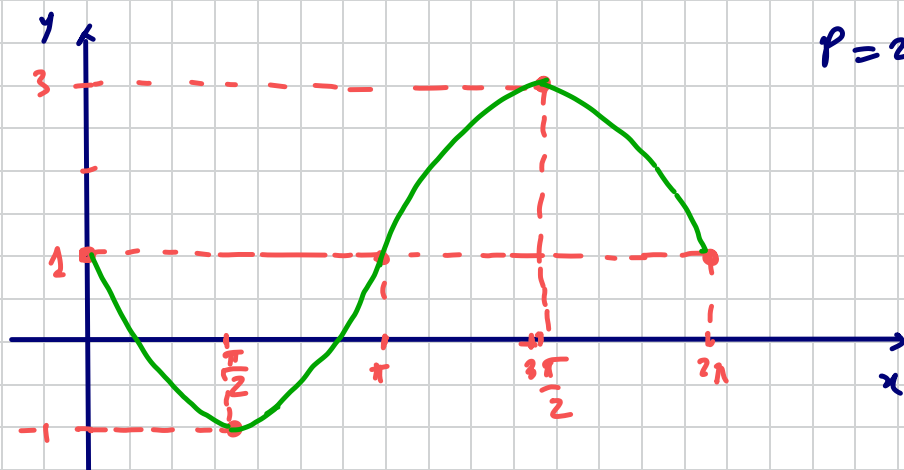
$$-2 \leq -2 \sin x \leq +2 \quad (+1)$$

$$1 - 2 \leq \underbrace{1 - 2 \sin x}_{f(x)} \leq 1 + 2$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = [-1, 3].$$

Esboço gráfico de f :

x	$y = 1 - 2\sin x$
0	$1 - 2 \cdot \sin 0 = 1 - 0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 - 2 = -1$
π	$1 - 2 \sin \pi = 1 - 0 = 1$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2 \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$
2π	$1 - 2 \sin 2\pi = 1 - 0 = 1$



$$(c) \quad y = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

$$\text{Dom} f = \mathbb{R}. \quad \text{Im} f = ?$$

Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \leq 1 \quad +1$$

$$1 - 1 \leq \underbrace{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}_{f(x)} \leq 1 + 1$$

$$0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, 2].$$

Esboço gráfico de f : Neste caso o arco do seno é uma composição. Reescreva por:

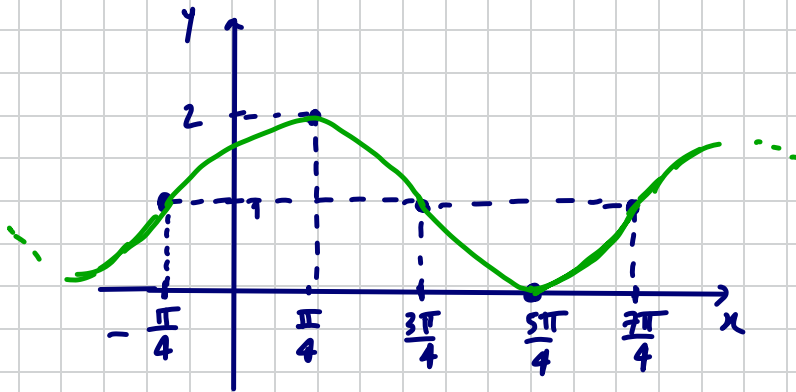
$$t = \frac{\pi}{4} + x.$$

Assim, temos:

$$y = 1 + \sin t.$$

$$x = t - \frac{\pi}{4}$$

t	$y = 1 + \sin t$	$x = t - \frac{\pi}{4}$
0	$1 + \sin 0 = 1$	$0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
π	$1 + \sin \pi = 1$	$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 + \sin \frac{3\pi}{2} = 0$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
2π	$1 + \sin 2\pi = 1$	$2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$



$$P = \frac{7\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$(d) \quad y = 3 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$$

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Im}(f) = ?$$

Note que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \leq 1 \quad (\times (-2))$$

$$+2 \geq -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \geq -2 \quad \Leftarrow \text{olho}$$

$$\Leftarrow \Rightarrow -2 \leq -2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) \leq 2. \quad (+3)$$

$$3-2 \leq \underbrace{3 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}_{f(x)} \leq 3+2$$

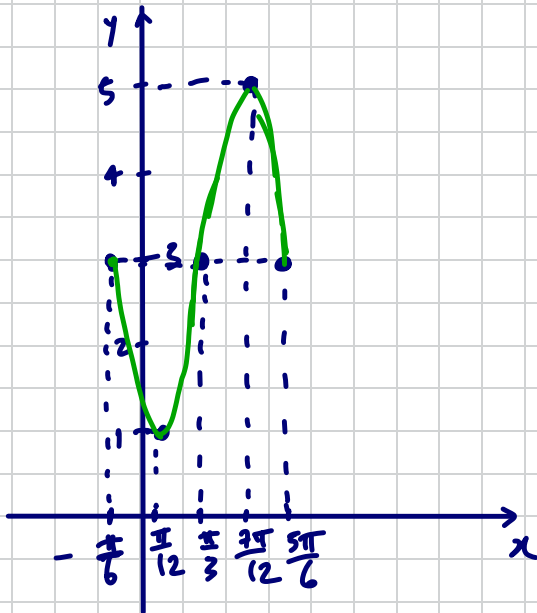
$$1 \leq f(x) \leq 5 \quad \Rightarrow \text{Im}(f) = [1, 5]$$

Esboço gráfico de f :

$$y = 3 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$$

$$t = \frac{\pi}{3} + 2x \rightarrow x = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}$$

t	$y = 3 - 2 \sin t$	$x = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}$
0	$3 - 2 \sin 0 = 3$	$0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$3 - 2 \sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$
π	$3 - 2 \sin \pi = 3$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$3 - 2 \sin \frac{3\pi}{2} = 5$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - 2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
2π	$3 - 2 \sin 2\pi = 3$	$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \\
 &= \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi
 \end{aligned}$$

Em geral, sendo $y = \sin(\alpha + k \cdot x)$, então o período é dado por $P = \frac{2\pi}{k}$

No exemplo acima:

$$y = 3 - 2 \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\alpha} + \underbrace{2x}_{\text{}}\right) \Rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Além disso; seja

$$y = \sin(kx) \cdot \text{Então:}$$

$$k = 1 : y = \sin x \Rightarrow 1 \text{ ciclo em } [0, \pi]$$

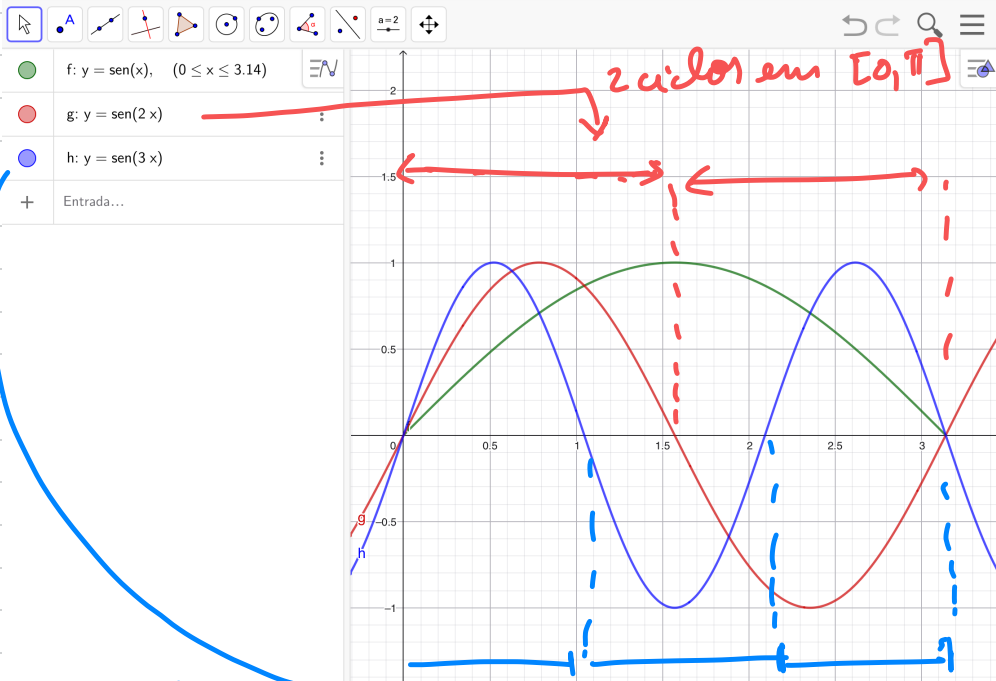
$$k = 2 : y = \sin 2x \Rightarrow 2 \text{ ciclos em } [0, \pi]$$

$$k = 3 : y = \sin 3x \Rightarrow 3 \text{ ciclos em } [0, \pi]$$

$$k = 4 : y = \sin 4x \Rightarrow 4 \text{ ciclos em } [0, \pi]$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$y = \sin kx \Rightarrow k \text{ ciclos no intervalo } [0, \pi].$$



$y = \sin 3x$: 3 ciclos no intervalo de $[0, \pi]$.

Estes mesmos argumentos são válidos para as demais funções trigonométricas que estudaremos.

FUNÇÃO COSSENO: Chama-se FUNÇÃO COSSENO a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$.

Analogamente ao que se fez com o seno fez-se para montar o gráfico do cosseno. Isto porque o cosseno pode ser visto como um seno, pois:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

O gráfico da função cosseno chama-se COSSENOÍDE.

Ex.: Esboce o gráfico de $y = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, indicando domínio, imagem e período.

Solução: $D(f) = \mathbb{R}$.

$$\text{Im}(f) = ?$$

Seja que:

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad (+1)$$

$$1-1 \leq \underbrace{1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}_{f(x)} \leq 1+1$$

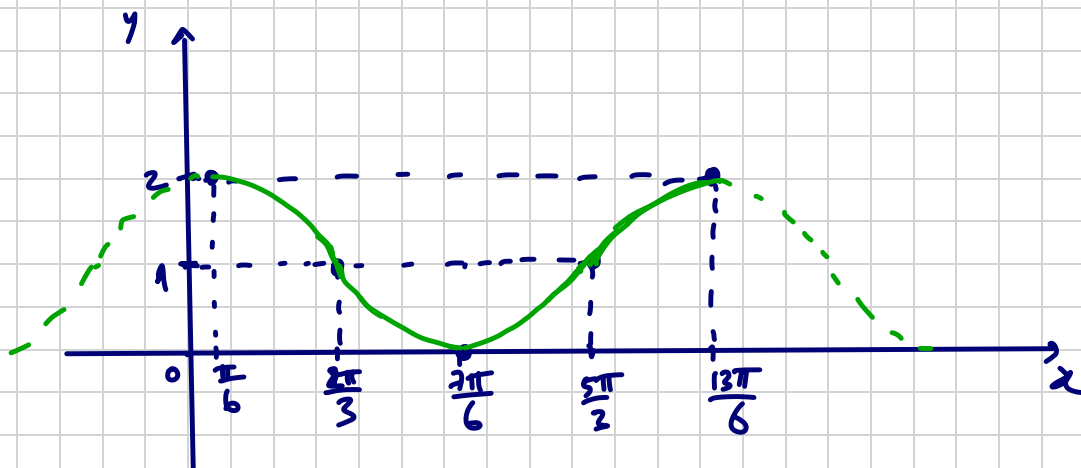
$$0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, 2].$$

Esboço gráfico: Escolha $t = x - \frac{\pi}{6}$

Anim; $x = t + \frac{\pi}{6}$; e então

$$y = 1 + \cos t$$

t	$y = 1 + \cos t$	$x = t + \frac{\pi}{6}$
0	$1 + \cos 0 = 2$	$0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + \cos \frac{\pi}{2} = 1$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$
π	$1 + \cos \pi = 0$	$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 + \cos \frac{3\pi}{2} = 1$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$
2π	$1 + \cos 2\pi = 2$	$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$



$$P = \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

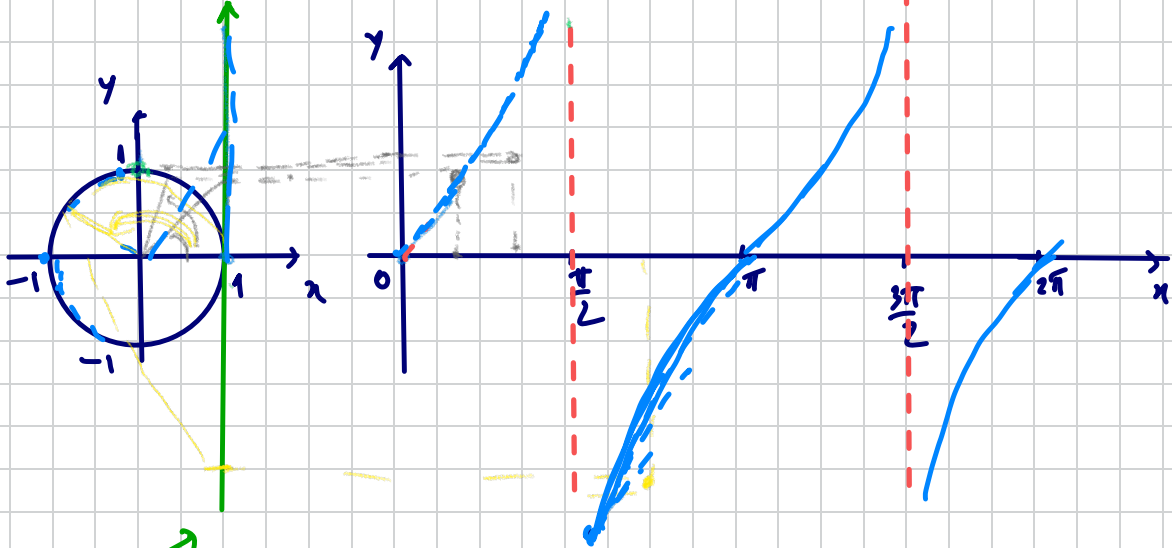
FUNÇÃO TANGENTE: Definimos a função tangente

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \tan x$$

RETIRAMOS EM ALGOS
QUE PARAM EM $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{3\pi}{2}$
POIS NELES A TANGENTE
NÃO EXISTE.

Esboço gráfico de $y = \tan x$:



eixo das tangentes
 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$P = \pi.$$

Ex: Esboce o gráfico de $y = 1 + \tan x$,
 indicando domínio, imagem e período.

Solução: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

Esboce gráfico:

x	$y = 1 + \tan x$
0	$1 + \tan 0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	∞
π	$1 + \tan \pi = 1$
$\frac{3\pi}{2}$	∞
2π	$1 + \tan 2\pi = 1$

