

LISTA 04

19. Sejam $x, y \in 1^{\circ}$ quadrante tais que $x + y = 75^{\circ}$, onde $\cot y = \frac{1}{4}$, calcule o valor de $\tan x$.

solução: $\tan y = \frac{1}{\cot y} \Rightarrow \tan y = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Sejam $x + y = 75^{\circ}$

$\Rightarrow x = 75^{\circ} - y$

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\Rightarrow \tan x = \tan(75^{\circ} - y) = \frac{\tan 75^{\circ} - \tan y}{1 + \tan 75^{\circ} \cdot \tan y}$

onde:

$\tan 75^{\circ} = \tan(30^{\circ} + 45^{\circ}) =$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$= \frac{\tan 30^{\circ} + \tan 45^{\circ}}{1 - \tan 30^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \\
 &= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{(3)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(3)^2 + 6\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{9 - 3} = \\
 &= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{6} = \underline{2 + \sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}}$$

Again, now solve:

$$\tan x = \frac{\tan 75^\circ - \tan y}{1 + \tan 75^\circ \cdot \tan y} = \frac{2 + \sqrt{3} - 4}{1 + (2 + \sqrt{3}) \cdot 4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2}{1 + 8 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 2}{9 + 4\sqrt{3}}$$

L4

16. Calcule o valor de $y = \cos 112,5^\circ \cdot \cot 165^\circ$.

↑
pensar
como
um
arco metade.

Reduzir ao 1º q.

$$\begin{array}{r} 112,5^\circ \\ \times 2 \\ \hline 225,0^\circ \end{array}$$

Solução:

Note que $112,5^\circ = 2 \times 225^\circ$. Assim:

$$\cos 112,5^\circ = \cos \frac{225^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos 225^\circ}{2}};$$

onde:

$$\begin{aligned} \cos 225^\circ &= -\cos(225^\circ - 180^\circ) \\ &\in 3^\circ \text{q} \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$\frac{x}{2} = 112,5^\circ \in 2^\circ \text{q}.$
e no 2º q o cosseno
é negativo.

Dessa forma, vamos obter:

$$\cos 112,5^\circ = -\sqrt{\frac{1 + \cos 225^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}} =$$

$$= - \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} = - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Além disso, temos que:

$$\cot 165^\circ = - \cot(180^\circ - 165^\circ) = - \cot 15^\circ; \text{ e como}$$

$\in 2.º$



$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{2}(2 - \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 2 - \sqrt{3};$$

então $\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} =$

$$\Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{(2)^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \underline{2+\sqrt{3}}$$

Logo, segue que:

$$\cot 165^\circ = -\cot 15^\circ = -(2+\sqrt{3}) = \underline{-2-\sqrt{3}}$$

Assim, concluir-se que:

$$\begin{aligned} \cos 112,5^\circ \cdot \cot 165^\circ &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cdot (-2-\sqrt{3}) = \\ &= + \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} // \end{aligned}$$

~~~~~

## TRIÂNGULOS QUALQUER

TEOREMA (LEI DOS COSSENOS) Em um triângulo qualquer de lados  $a, b, c$  e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ , valem as seguintes igualdades:

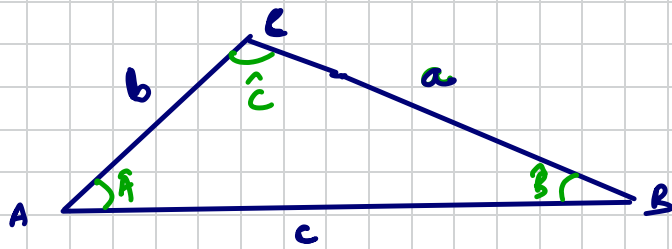
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

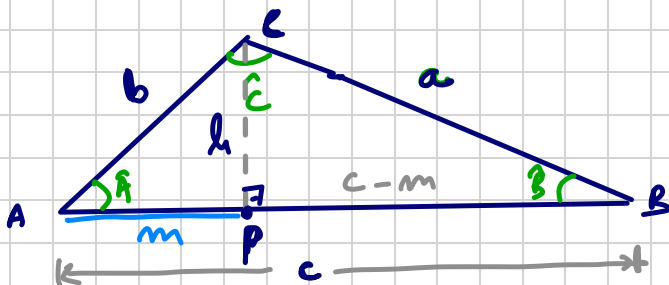
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

obs. Nesta notação o ângulo  $\hat{A}$  é de vértice oposto ao lado  $a$ , e assim por diante.

DEMONSTRAÇÃO Considere o triângulo ABC conforme o esquema (vamos considerar triângulo obtusângulo, ou seja, um dos ângulos internos maior do que  $90^\circ$ , mas observamos que o caso acutângulo é similar)

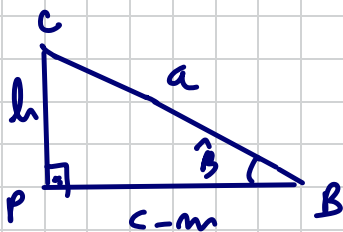


Seja  $h$  a altura do triângulo relativa ao vértice  $C$  e lado  $\overline{AB} = c$ ; interceptando este lado num ponto  $P$

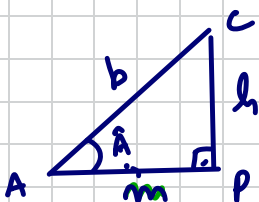


Seja  $m$  o cateto adjacente do triângulo APC, reto em  $P$ . O triângulo BPC também é retângulo, reto em  $P$ .

Deo T. de Pitágoras, nos triângulos retângulos APC e BPC, teremos:



$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 \quad (*)$$



$$b^2 = h^2 + m^2$$

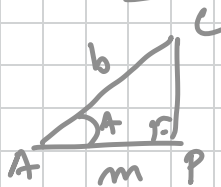
$$\Rightarrow \boxed{h^2 = b^2 - m^2} \quad (**)$$

De (\*) e (\*\*), vem:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2$$

$$a^2 = b^2 - \cancel{m^2} + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + \cancel{m^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \underline{m}$$



$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow \underline{m = b \cdot \cos \hat{A}}$$

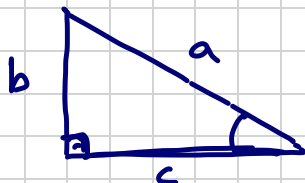
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$$

Analogamente mostramos as outras igualdades

□

Obs.: O caso triângulo retângulo torna-se, assim, um caso particular da lei dos cossenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90^\circ$$

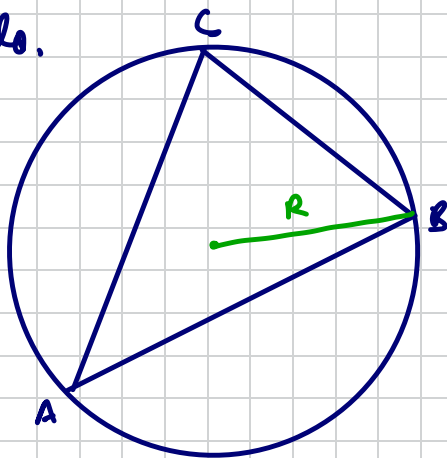
$$a^2 = b^2 + c^2$$



TEOREMA: (LEI DOS SENOS) Em um triângulo qualquer de lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ , tem-se:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

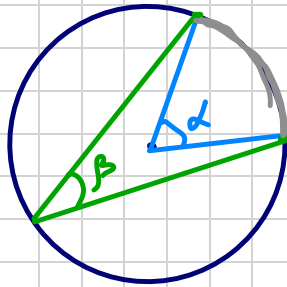
DEMONSTR: Seja  $ABC$  um triângulo qualquer de lados  $a, b$  e  $c$ . Como três pontos não colineares definem uma circunferência, seja a circunferência que contém os vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo.



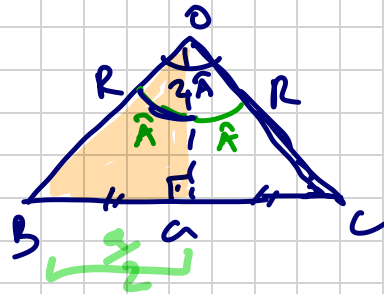
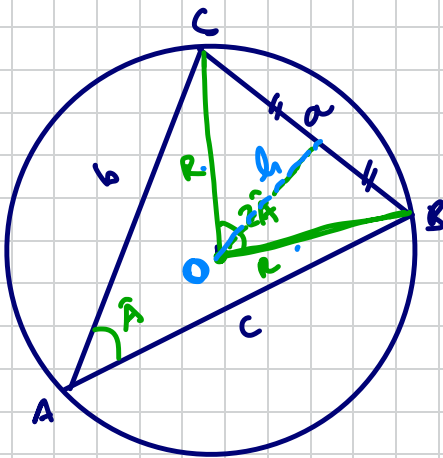
Seja, o triângulo  $ABC$  pode ser inscrito numa circunferência de raio  $R$ .

Da geometria Plana tem-se a relação entre ângulo central e ângulo inscrito numa circun-

exercício: dados  $\alpha$  e  $\beta$  ângulo central e inscrito de um arco numa circunferência, então  $2\beta = \alpha$ .



Então, voltando ao nosso problema, temos:

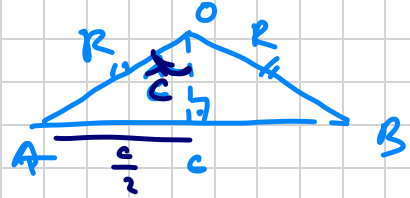
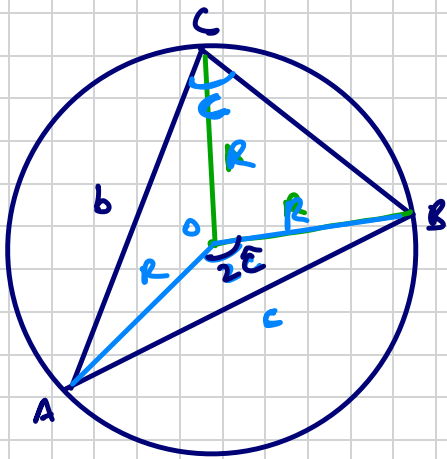


$OBC$  é isósceles.

$$\sin \hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

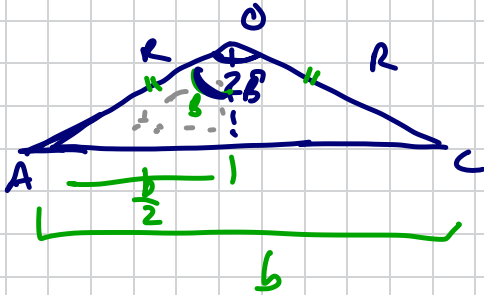
$$\Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin \hat{A}}$$

O mesmo se faz nos outros dois lados:



$$\sin \hat{C} = \frac{\frac{c}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



$$\sin \hat{B} = \frac{\frac{b}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Portanto;

$$\underline{2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}}$$

□

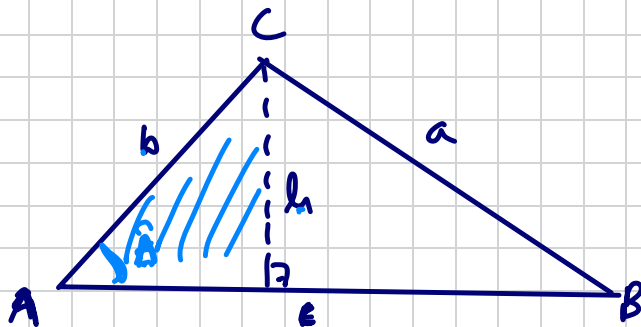
TEOREMA (TEOREMA DA ÁREA) Em um triângulo ABC qualquer, de lados  $a, b, c$  e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ , tem-se que a área  $S$  desse triângulo será dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C} ; \text{ ou}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \hat{B} ; \text{ ou}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A} .$$

DEMONSTRE:



$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h ; \text{ onde}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \hat{A}$$

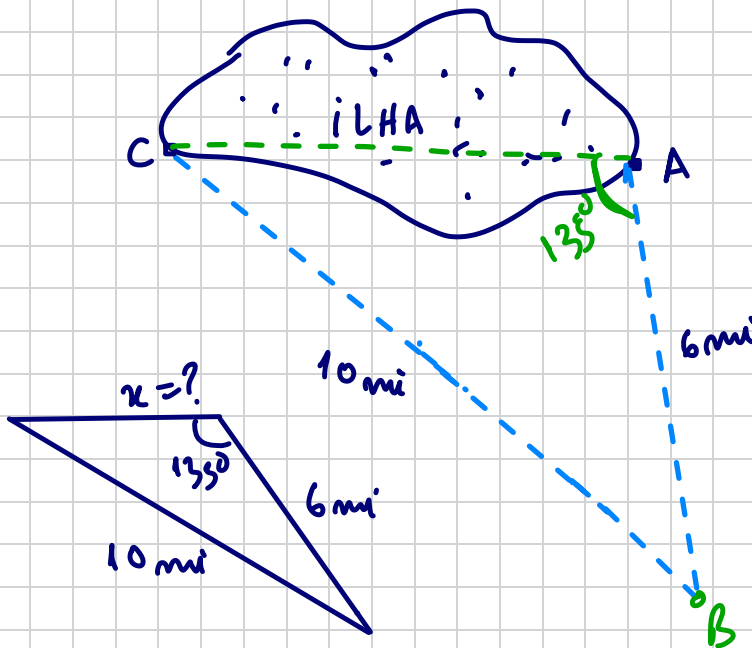
$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}$$

Analogamente se mostram as demais iguais.

□

### EXEMPLOS (LISTA 04)

31. Uma bóia, localizada em um ponto B, está a 6 milhas de distância de um ponto A em uma extremidade de uma ilha e distante 10 milhas de um ponto C na outra extremidade da ilha. Se o ângulo  $\hat{BAC}$  mede  $135^\circ$ , determine a distância do ponto A ao ponto C.



Vamos usar a lei dos cossenos. Assim:

$$(10)^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot x \cdot 6 \cdot \cos 135^\circ$$

$$100 = x^2 + 36 - \cancel{12}x \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

209

$$100 = x^2 + 36 + 6\sqrt{2}x$$

$$x^2 + 6\sqrt{2}x - 100 + 36 = 0$$

$$x^2 + 6\sqrt{2}x - 64 = 0$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 64}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{72 + 256}}{2}$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{328}}{2}$$

~~$$x = \frac{-6\sqrt{2} - \sqrt{328}}{2}$$~~

7 marks

$$x = \frac{-6\sqrt{2} + \sqrt{328}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6\sqrt{2} + \sqrt{328}}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 328 & 2 \\ 164 & 2 \\ 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ \hline \downarrow & \end{array}$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} + \sqrt{2^{\cancel{3}} \cdot 82}}{2}$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} + 2\sqrt{82}}{2} = \cancel{2} \frac{(-3\sqrt{2} + \sqrt{82})}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\sqrt{82} - 3\sqrt{2}}_{\text{milhas.}}$$