

cálculo 1A

11/12/25 - AVLA 21

deixaremos com outros exemplos envolvendo máximos e mínimos.

De uma prova antiga:

Questão 02. Um cabo telegráfico submarino consiste de um núcleo de fios de cobre com uma capa de material isolante. Se x indica a razão do raio do núcleo para a espessura da capa, sabe-se que a velocidade de sinalização é dada por

$$V(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}.$$

Mostre que a velocidade máxima se obtém quando $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Solução:

$$V(x) = x^2 \cdot \ln \frac{1}{x}.$$

Mostre que o máximo ocorre em $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Para determinar máximos e mínimos precisamos examinar pontos críticos; ou seja, onde $V'(x) = 0$ ou onde $\nexists V'(x)$.

$$\begin{aligned} V(x) &= x^2 \cdot \ln \frac{1}{x} = x^2 \cdot \ln x^{-1} = \\ &= x^2 \cdot (-1 \cdot \ln x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x) = - \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{\ln x}_v$$

Derivando, vem:

$$V'(x) = u \cdot v' + u' \cdot v \quad ; \quad \text{onde:}$$

$$\begin{cases} u = -x^2 \Rightarrow u' = -2x \\ v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Assim, obtenemos:

$$V'(x) = -x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + (-2x) \cdot \ln x$$

$$V'(x) = -x - 2x \ln x$$

$$V'(x) = -x(1 + 2 \ln x)$$

para pontos críticos:

$$\bullet V'(x) = 0 \Leftrightarrow -x(1 + 2 \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 1 + 2 \ln x = 0 \end{cases}$$

PONTOS CRÍTICOS: $\Leftarrow$

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

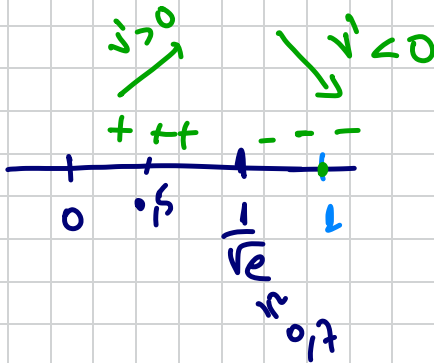
$$2 \ln x = -1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\log_e x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

SINAIS DA DERIVADA $v'(x) = -x(1 + 2 \ln x)$



$$x = 1 \Rightarrow v'(1) = -1 \cdot \underbrace{(1 + 2 \ln 1)}_0 = -1 < 0$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow v'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} (1 + 2 \ln \frac{1}{2}) \\ \approx -\frac{1}{2} (1 - 1,3) > 0$$

O máximo ocorre quando $x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

02) Considere a função $f(x) = x^2 + x^3$.

Encontre os pontos críticos, intervalos de crescimento e decréscimo, e pontos de máximo e mínimo, se existirem.

Solução: pontos críticos: onde $\underline{f'(x) = 0}$ ou onde $\nexists f'(x)$. Como f é um polinômio, a derivada sempre existe.

$$f(x) = x^2 + x^3.$$

$$\rightarrow f'(x) = 2x + 3x^2$$

$$\text{pontos críticos: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 + 3x) = 0$$

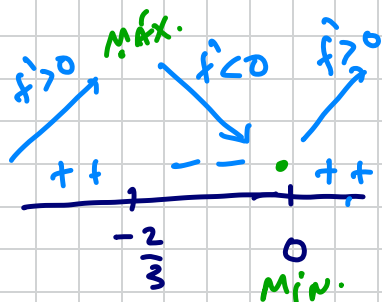
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 + 3x = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Solutoes crílicas encontradas: $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$

SINAL DA DERIVADA:

$$f'(x) = 2x + 3x^2$$



$$x=1: f'(1) = 2 + 3 > 0$$

$$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(-\frac{1}{2}) &= 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = \\ &= -1 + \frac{3}{4} < 0 \end{aligned}$$

$$x = -1;$$

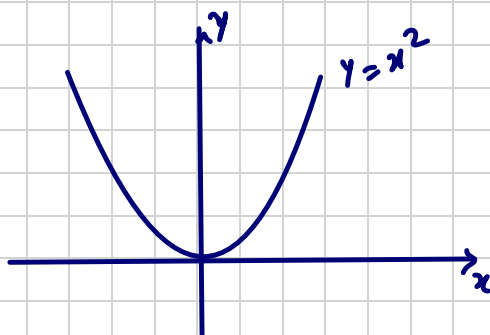
$$\begin{aligned} f'(-1) &= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 = \\ &= -2 + 3 > 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que:

- f é crescente no intervalo $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$
- f é decrescente no intervalo $(-\frac{2}{3}, 0)$
- $\text{Máx.}(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3}))$.
- $\text{Min.}(0, f(0)) = (0, 0)$

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO

Para ilustrar estes conceitos, considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, cujo gráfico está representado abaixo:



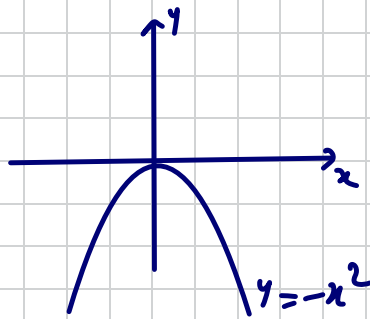
Esta função possui a concavidade voltada para cima (c.p.c.).

$$\text{Note que } f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 > 0$$

Já a função $g(x) = -x^2$ possui concavidade para baixo. (c.p.b.)



Note que $f(x) = -x^2$
 $\Rightarrow f'(x) = -2x$
 $\Rightarrow f''(x) = -2 < 0.$

Outro seja, isto ilustra o seguinte resultado:

prop.: Dizemos que uma função $f(x)$ possui a concavidade para cima (c.p.c) em um dado intervalo I , e somente I , $f''(x) > 0$ nesse intervalo; e a concavidade para baixo (c.p.b.) I , e somente I , $f''(x) < 0$ nesse intervalo.

Outro seja, precisamos estudar o sinal da derivada segunda: onde for positiva teremos c.p.c. e onde for negativa teremos c.p.b.

Def.: o ponto onde muda o sentido da concavidade chama-se PONTO DE INFLEXÃO (P.I.)

RESUMO:

- $f(x)$. $\rightarrow$ calcule $f'(x)$. $\rightarrow$ verifica onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists f'(x)$

$\downarrow$
estude sinal de $f'(x)$

$\swarrow$
 $f' > 0 \Leftrightarrow$ crescente

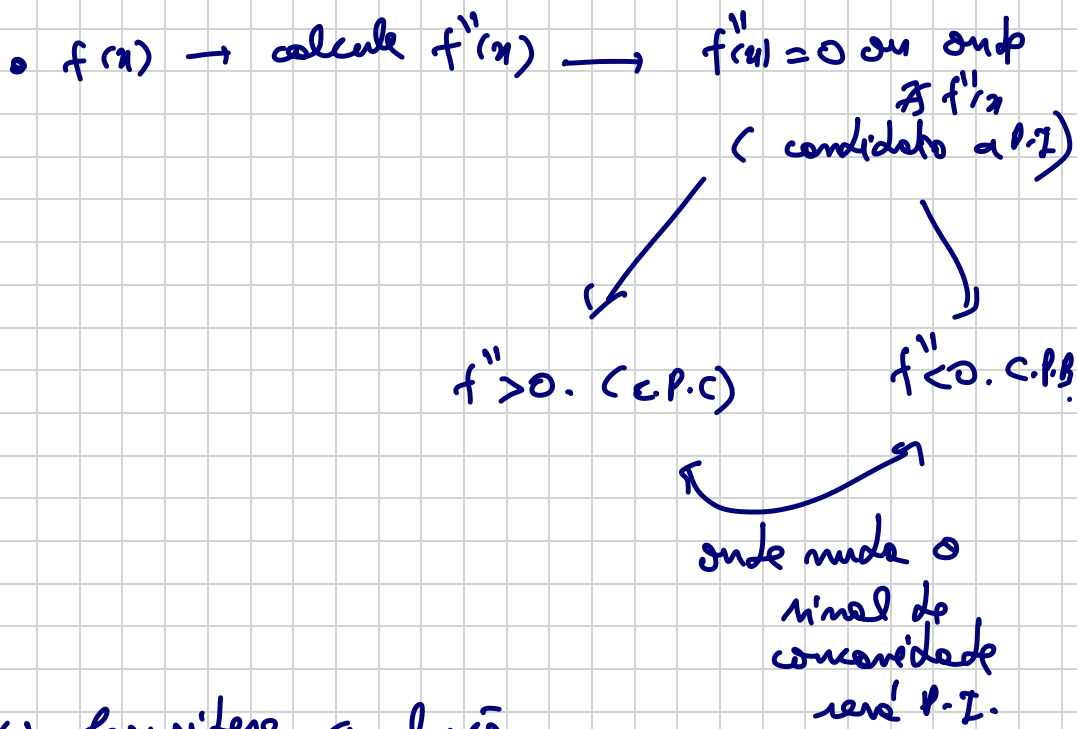
$f' > 0$ $f' < 0$
 $\swarrow$ $\searrow$

Max.

$\searrow$
 $f' < 0 \Leftrightarrow$ decresc.

$f' < 0$ $f' > 0$
 $\swarrow$ $\searrow$

Min



Ex.1 Considere a função

$$f(x) = x^3 - x.$$

Determine

- pontos críticos.
- intervalos de crescimento e decréscimo e pontos de máximo e mínimo (se existirem)
- intervalos onde o gráfico possui concavidade para cima e concavidade para baixo.
- pontos de inflexão, se existirem.

Solução: $f(x) = x^3 - x$.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$$

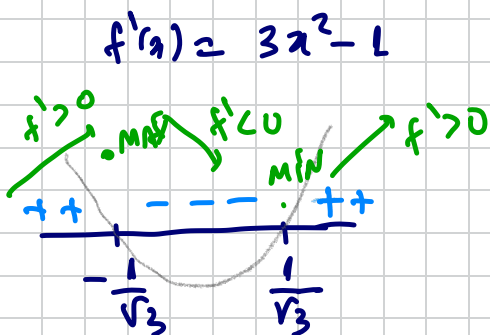
$$\Leftrightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pontos
Críticos

(b) estudando o sinal de derivada, obtemos:



• f é crescente em $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

• f é decrescente em $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

- $\max \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)$

- $\min \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)$

(c) e (d): para encontrar o estudo da concavidade e se tem P.I., precisamos estudar o sinal da derivada segunda. Assim:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

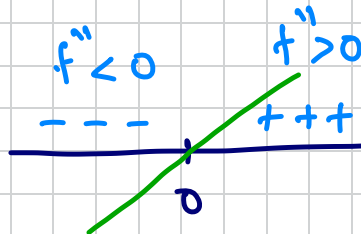
$$\Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

CANDIDATO A P.I.

SINAL DE $f''(x)$:

$$y'' = 6x.$$



Logo, temos que f possui:

• c.p.c. no intervalo $(0, +\infty)$

• c.p.b. no intervalo $(-\infty, 0)$

• $\exists$ p.i. $(0, +\infty) = (0, 0)$

ilustração no GEOGEBRA:

