CÁLCULO 1A

02/12/25 – AULA 18

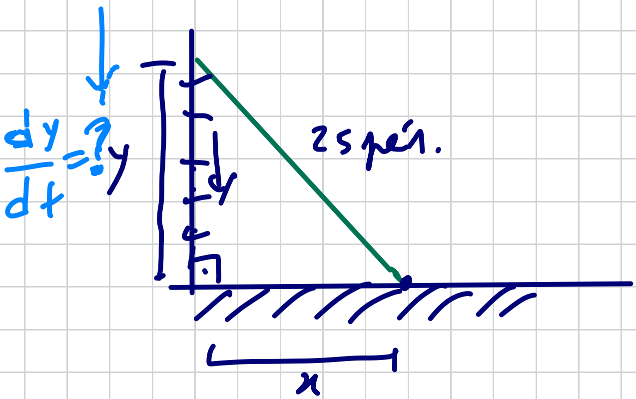
TAXAS RELACIONADAS

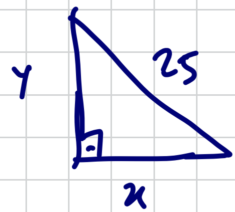
Uma aplicação importante do estudo de derivadas são questões envolvendo taxas de variação (instantânea). Já estudamos o significado físico da derivada: a derivada da função da posição é a velocidade do móvel; e esta, por sua vez é a taxa de variação da velocidade instânea (em relação ao tempo). Ou seja, uma derivação representará uma taxa de variação de um problema específico. Vamos ver alguns contextos em exemplos.

01) Uma escada com 25 pés de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 pés/s, qual a velocidade com

que a escada está deslizando, quando o seu pé estiver a 15 pés da parede?

Solução:





Pelo T. de Pitágoras:

$$(25)^2 = x^2 + y^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 625}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ pés/s}$$

queremos achar $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x = 15 \text{ pés}} = ?$

Nestes problemas, a variável é o tempo t.
Então, $x = x(t)$ e $y = y(t)$; ou seja, x e y são funções que dependem do tempo.

Como $x^2 + y^2 = 625$ é uma função definida implicitamente. Então, derivando (em t), vamos obter:

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dt} = -2x \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (\div 2)$$

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x \frac{dx}{dt}}{y};$$

e como $x^2 + y^2 = 625$; segue que $y = \sqrt{625 - x^2}$

Assim:

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{x \cdot \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{3 \text{ pés/s.}}}{\sqrt{625 - x^2}}$$

Portanto;

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x = 15 \text{ pés}} = \frac{-15 \cdot 3}{\sqrt{625 - (15)^2}}$$

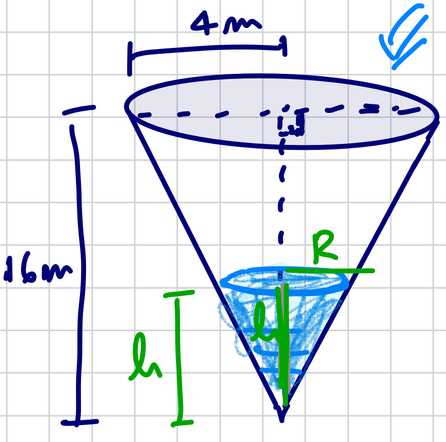
$$= \frac{-45}{\sqrt{625-225}} = -\frac{45}{\sqrt{400}}$$

$$= -\frac{45}{\sqrt{4 \cdot 100}} = -\frac{45}{2 \cdot 10} = -\frac{9}{2 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=15 \text{ pés}} = -\frac{9}{4} \text{ pés/s.}$$

02) Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16m de altura e uma base com 4 m. de raio. A água flui no tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade o nível de água estará se elevando quando a profundidade for de 5m?

Solução:



$$\frac{dV}{dt} = +2m^3/min$$

pois está "enchendo".

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5m} = ?$$

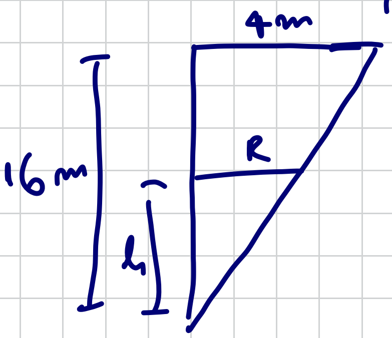
O volume de um cone de raio R e altura h é dado por:

$$V = \frac{Ab.h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \; ;$$

onde R e h dependem do tempo t.

Precisamos encontrar uma relação entre R e h. Por semelhança de triângulos, temos:



$$\frac{16}{4} = \frac{h}{R}$$

$$4 = \frac{h}{R} \Rightarrow \boxed{h = 4R}$$

$$\hookrightarrow R = \frac{h}{4}$$

Assim:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{48} \cdot h^3 .$$

Derivando em relação a t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{\cancel{48}_{16}} \cdot \cancel{3} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16 \cdot \frac{dV}{dt}}{\pi \cdot h^2} .$$

2 m³/min.

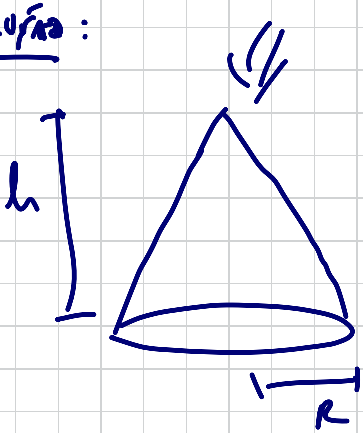
Assim:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5m} = \frac{16 \cdot 2}{\pi \cdot (5)^2} = \frac{32}{25\pi} \text{ m/min}$$

LISTA05:

3. Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de 10 m^3/min, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura está crescendo quando o monte tiver 8 m de altura? (Resp. $\frac{5}{8\pi}$ m/min).

Solução:



$$\frac{dV}{dt} = +10 \, m^3/min.$$

$$h = 2 \cdot R \longrightarrow \boxed{R = \frac{h}{2}}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8m} = ?$$

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

Derivando em relação a t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{\cancel{12}_{4}} \cdot \cancel{3} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4 \cdot \overbrace{\frac{dv}{dt}}^{10m^3/min}}{\pi \cdot h^2}$$

Assim:

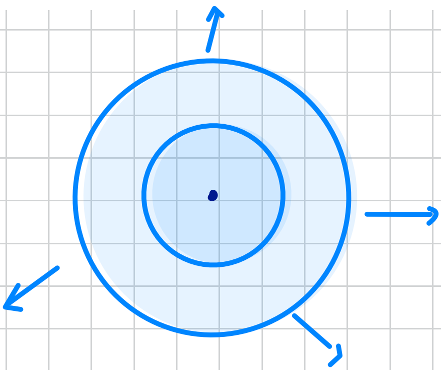
$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8m} = \frac{4 \cdot 10}{\pi \cdot (8)^2} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot 5}{\pi \cdot \cancel{8} \cdot 8}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{8\pi} \text{ m/min.}$$

L5

6. Uma pedra cai livremente em um lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de 16 cm/s. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de 4 cm? (Resp. 128 π cm^2/s).

↘ a área.



$$\frac{dR}{dt} = +16 \text{ cm/s}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{R=4\text{ cm}} = ?$$

A área A de um círculo é dada por:

$$A = \pi R^2$$

A taxa de variação em relação ao tempo t será!

dada por:

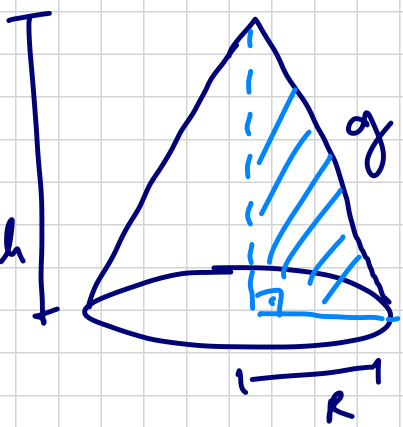
$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2R \cdot \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R \cdot \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{16\,cm/s}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{R=4cm} = 2\pi \cdot 4 \cdot 16 = 128\pi \ cm^2/s .$$

L5:

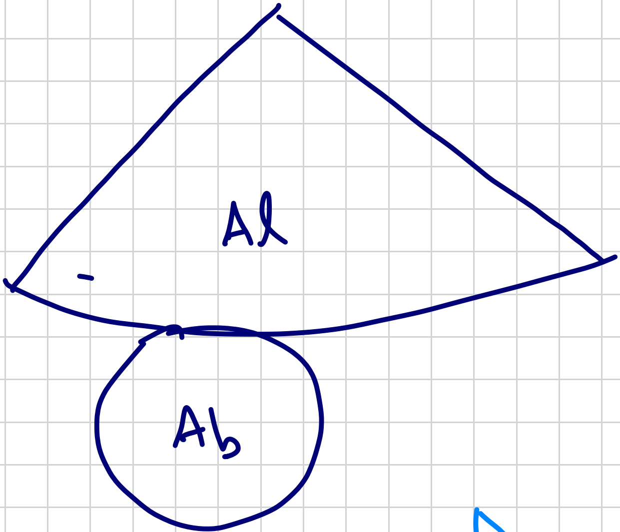
9. O raio da base de um certo cone aumenta na razão de 3cm/h e a altura diminui na razão de 4cm/h. Calcule como varia a sua área total quando o raio medir 7cm e a altura medir 24 centímetros. (Resp. aumenta 96 π cm^2/h).



$$\frac{dh}{dt} = -4\,cm/h$$

$$\frac{dR}{dt} = +3\,cm/h$$

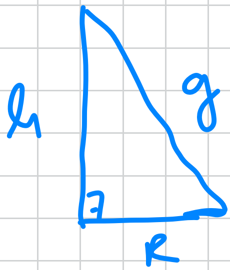
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{R=7cm \\ h=24cm}} = ?$$



$A = A_l + A_b$

$A = \pi R g + \pi R^2$,

onde g é a geratriz do cone.



Pelo T. de Pitágoras:

$g^2 = R^2 + h^2$

$g = \sqrt{R^2 + h^2}$

Assim a área será:

$A = \pi R . \sqrt{R^2 + h^2} + \pi R^2$

$A = \underbrace{\pi . R}_{u} . \underbrace{(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}_{v} + \pi R^2$

Derivando em relação a t, vamos obter:

lembre que $(u.v)' = u.v' + u'.v$

$$u = \pi R \Rightarrow u' = \pi \cdot \frac{dR}{dt}$$

$$v = (R^2+h^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}(R^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (R^2+h^2)'$$

$$v' = \frac{1}{\cancel{2}}(R^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cancel{2}R \cdot \frac{dR}{dt} + \cancel{2}h \cdot \frac{dh}{dt}\right)$$

$$v' = \frac{R \cdot \frac{dR}{dt} + h \cdot \frac{dh}{dt}}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

Assim:

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot R \cdot \left(\frac{R\,\frac{dR}{dt} + h \cdot \frac{dh}{dt}}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) + \pi \frac{dR}{dt}\sqrt{R^2+h^2} +$$

$$+ 2\pi R \cdot \frac{dR}{dt}$$

Assim:

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{R=7 \\ h=24}\ \substack{\frac{dR}{dt}=3 \\ \frac{dh}{dt}=-4}} =$$

$$= \pi \cdot 7 \cdot \left(\frac{7 \cdot 3 + 24 \cdot (-4)}{\sqrt{(7)^2 + (24)^2}} \right) +$$

$$+ \pi \cdot 3 \sqrt{(7)^2 + (24)^2} + 2\pi \cdot 7 \cdot 3$$

$$= 7\pi \cdot \left(\frac{21 - 96}{25} \right) + 3\pi \cdot 25 + 42\pi$$

$$-21\pi + 75\pi + 42\pi = \underline{\underline{96\pi \ cm^2/h}}$$