CÁLCULO 1A

$\boxed{09/12/25 \text{ - AULA 20}}$

Na aula passada iniciamos o estudo envolvendo máximos e mínimos. Vamos trabalhar outros exemplos.

01) Dada a função cuja lei é

$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}.$$

Determine:

(a) $D(f)$.

(b) pontos críticos.

(c) intervalos de crescimento e decrescimento e pontos de máximo e mínimo, se existirem

SOLUÇÃO:

$$f(x) = (1-x)^{1/3} = \sqrt[3]{1-x}.$$

(a) $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists\, f'(x)$.

$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = u^k \Rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (1-x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

- $f'(x) = 0 \iff \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = 0 \iff -1 = 0$

Absurdo!

Logo, $\nexists$ ponto crítico onde $f'(x) = 0$.

- $\nexists f'(x) \iff 1-x = 0 \iff x = 1$

Conclusão: único ponto crítico: $x = 1$.

(c) f é crescente $\iff f'(x) > 0$

f é decrescente $\iff f'(x) < 0$

Como $f'(x) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}}$ é tal que

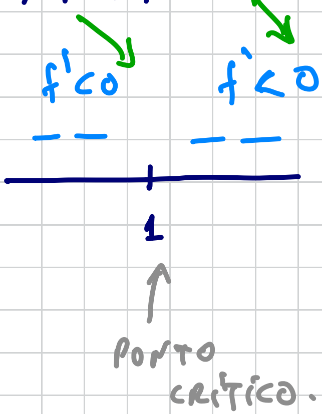
$$(1-x)^2 > 0, \quad \forall x \neq 1,$$

segue que

$$f'(x) = -\frac{1}{\underbrace{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}_{>0}} < 0$$

Como $f'(x) < 0, \ \forall x \neq 1$; segue que f é decrescente em todo o seu domínio

máximo / mínimo:



Logo, esta função não possui pontos de máx. e de mínimo.

02) Dada $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$; determine:

(a) $D(f)$.

(b) pontos críticos.

(c) intervalos de crescimento e decrescimento, e os pontos de máximo e de mínimo, se existirem.

<u>solução:</u> $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

(a) $D(f) = ?$ $\quad x^2 - 4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(b) pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists f'(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} = \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \text{ ; onde:}$$

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow u' = 1 \\ v = x^2 - 4 & \Rightarrow v' = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2-4).1 - x.2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f'(x)} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = \underbrace{-\frac{(x^2+4)}{(x^2-4)^2}}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x^2+4)}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+4=0$

$\Leftrightarrow x^2 = -4.$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

(não tem ponto crítico quando $f'(x)=0$).

- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow (x^2-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-4=0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

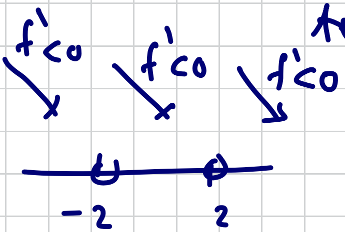
porém, tais pontos não estão no $D(f)$.

<u>Conclusão</u>: f não possui pontos críticos.

(c) crescimento / decrescimento de f: visto pelo estudo do sinal da derivada.

$$f'(x) = \frac{-\overbrace{(x^2+4)}^{\geq 0}}{\underbrace{(x^2-4)^2}_{\geq 0}} < 0$$

<u>conclusão</u>: f é decrescente em todo o seu domínio.

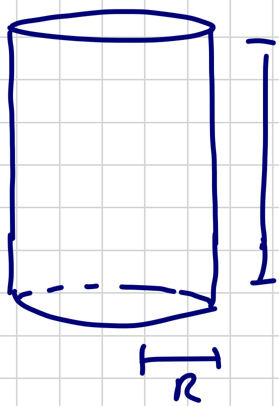


Logo, f não possui pontos de máximo e nem de mínimo.

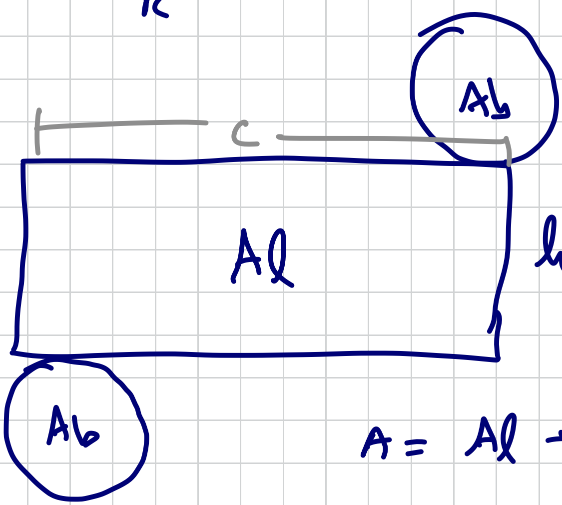
03) Se uma lata fechada com volume $16\pi cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado para a sua fabricação.

Solução:

$$\boxed{V = 16\pi \, cm^3}$$



A área A deve ser mínima.



$$A = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_l = 2\pi R \cdot h \quad ; \quad A_b = \pi R^2$$

$\Rightarrow A = A\ell + 2 . Ab$

$\Rightarrow A = 2\pi R h + 2 \pi R^2$

Como $V = 16\pi \text{ cm}^3$; e

$V = Ab . h = \pi R^2 . h$

Então: $\cancel{\pi} R^2 h = 16 \cancel{\pi}$

$R^2 h = 16$

$$\boxed{h = \frac{16}{R^2}}$$

RELAÇÃO ENTRE R e h.

Assim a área A será dada por:

$A = 2\pi R . h + 2\pi R^2$

$A = 2\pi \cancel{R} . \frac{16}{R^{\cancel{2}}} + 2\pi R^2$

$A = \frac{32\pi}{R} + 2\pi R^2 \Rightarrow A(R) = 32\pi . R^{-1} + 2\pi R^2$

pontos críticos: onde $A'(R) = 0$ ou onde

$\nexists A'(R)$.

$$A(R) = 32\pi R^{-1} + 2\pi R^2$$

$$\rightarrow A'(R) = 32\pi \cdot (-1 \cdot R^{-2}) + 2\pi \cdot (2R)$$

$$\Rightarrow A'(R) = -\frac{32\pi}{R^2} + 4\pi R = \frac{-32\pi + 4\pi R^3}{R^2}$$

- $A'(R) = 0 \Leftrightarrow -32\pi + 4\pi R^3 = 0$

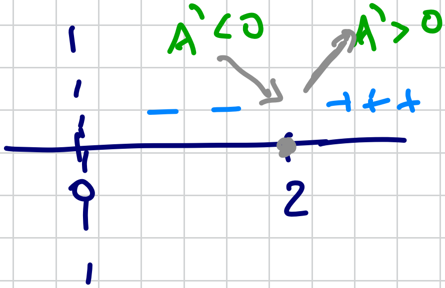
$$\Leftrightarrow 4\cancel{\pi} R^3 = 32\cancel{\pi}$$

$$\Leftrightarrow R^3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{R = 2}$$

- $\nexists A'(R) \Leftrightarrow R^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{R = 0}$

(de facto, não tem sentido prático, pois não vai existir um cilindro de raio zero)

Estudo do sinal da derivada (cresc / decresc)



$$A'(R) = \frac{-32\pi + 4\pi R^3}{R^2}$$

$R > 2$; $A'(R) > 0$

10

$0 < R < 2$; $A'(R) < 0$

1

Logo, $R = 2$ é um ponto de mínimo.

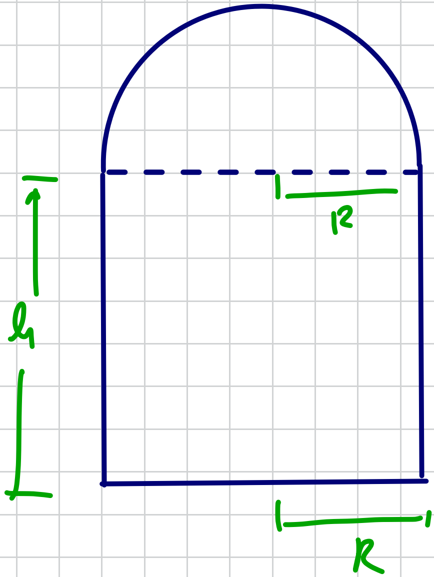
Conclusão: a área será mínima quando $R = 2$ cm. Neste caso, teremos a altura

$$h = \frac{16}{R^2} = \frac{16}{(2)^2} = \frac{16}{4} = 4 \text{ cm.}$$

---

04) Uma janela em estilo normando tem a forma de um retângulo com um semicírculo sobre ele. Sabendo que o perímetro de uma janela normanda é de 10 m, determine suas medidas de modo que permita a maior passagem de luz.

solução: precisamos das dimensões de uma janela normanda que tenha a maior área possível, mas que preserve o perímetro em 10m.



PERÍMETRO: 10m

$$10 = h + 2R + h + \frac{C}{2} \quad ; \text{ onde } C = 2\pi R$$

comprim. da circunf.

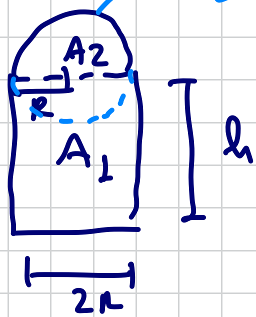
$$10 = 2h + 2R + \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}}$$

$$10 = 2h + 2R + \pi R \Rightarrow h = \frac{10 - 2R - \pi R}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{10 - (2+\pi)\cdot R}{2}}$$

Queremos uma área total máxima.

$A_2 = \frac{\pi R^2}{2}$



$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = 2Rh + \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A = \cancel{2}R \cdot \left(\frac{10 - (2+\pi)R}{\cancel{2}} \right) + \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A = 10R - (2+\pi)R^2 + \frac{\pi}{2} R^2$$

$$A = 10R - 2R^2 - \pi R^2 + \frac{\pi}{2} R^2$$

$$A = 10R - 2R^2 - \frac{\pi}{2} R^2$$

pontos críticos: onde $A'(R) = 0$ ou onde

$\nexists\ \cancel{A'}(R)$

$$A'(R) = 10 - 4R - \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{2}R)$$

$$A'(R) = 10 - 4R - \pi R$$

$$\boxed{A'(R) = 10 - (4+\pi)\cdot R}$$

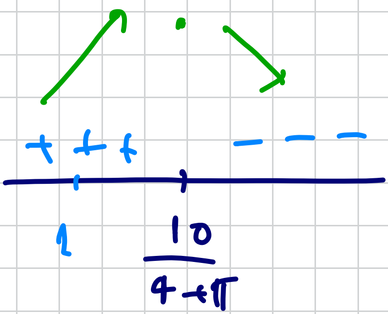
Assim:

$$A'(R) = 0 \Leftrightarrow 10 - (4+\pi)\cdot R = 0$$

$$\Leftrightarrow (4+\pi)R = 10$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{10}{4+\pi}\ m}$$

ESTUDO DO SINAL DA DERIVADA:



$R < \dfrac{10}{4+\pi}$ (Ex.: $R = 1$)

$$A'(1) = 10 - (4+\pi)\cdot 1$$
$$= 10 - 4 - \pi$$
$$= 6 - \pi > 0$$

$R > \dfrac{10}{4+\pi}$ (Ex.: $R = 10$)

$$A'(10) = 10 - (4+\pi)\,10 < 0$$

Logo, teremos um ponto de máximo quando

$$R = \frac{10}{4+\pi}\ m.$$

Neste caso, teremos $h = \dfrac{10-(2+\pi)R}{2}$

$$\Rightarrow h = \frac{10-(2+\pi)\cdot\dfrac{10}{4+\pi}}{2}\ m$$

$$= h = \frac{\dfrac{40+\cancel{10\pi}-20-\cancel{10\pi}}{4+\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{20}{4+\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{10}{4+\pi}\ m.$$

Resp.: A área será máxima quando tivermos $h = \dfrac{10}{4+\pi}\ m$ e $R = \dfrac{10}{4+\pi}\ m.$

Em resumo, para resolver um problema envolvendo MÁXIMOS e MÍNIMOS precisamos:

- esquematizar (desenhar) o problema;
- encontrar a função que descreve o problema (a uma variável; se tiver mais de uma variável, encontrar uma relação entre elas, para deixar em termos de uma variável)
- encontrar a derivada da função e estudar o seu sinal, em torno dos pontos críticos

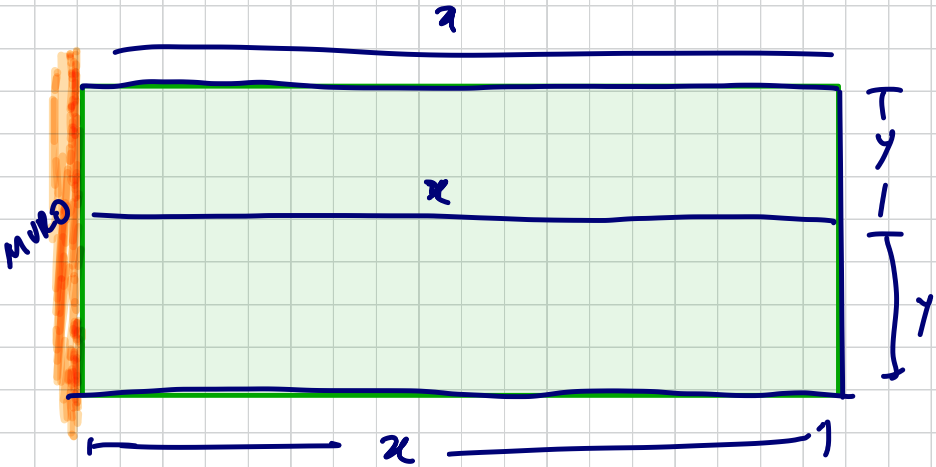
ONDE A DERIVADA SE ANULA OU ONDE ELA NÃO EXISTE

Vejamos mais um exemplo:

Ex.:

Um fazendeiro dispõe de 600 m de material para cercar um pasto retangular adjacente a um muro já existente. Ele planeja construir uma cerca paralela ao muro, duas cercas formando as extremidades laterais e uma quarta cerca (paralela às duas últimas) para dividir o cercado em duas partes iguais. Qual é a área máxima que pode ser cercada?

solução:



Temos: $3x + 2y = 600$

$$2y = 600 - 3x$$

$$\boxed{y = \frac{600 - 3x}{2}}$$ relação entre x e y.

A área A deve ser máxima.

$$A = x.(2y) = 2xy$$

$$A = \cancel{2}x \cdot \left(\frac{600 - 3x}{\cancel{2}} \right) = 600x - 3x^2$$

$$A(x) = 600x - 3x^2$$

pontos críticos: onde $A'(x) = 0$ ou $\nexists\, A'(x)$

$$\boxed{A'(x) = 600 - 6x}.$$

$$A'(x) = 0 \iff 600 - 6x = 0$$

$$\iff 6x = 600$$

$$\iff \boxed{x = 100}$$

SINAL DA DERIVADA:

$A' > 0$ $\quad$ $A' < 0$

$+ + +$ $\quad$ $- - -$

100

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1, \quad A'(x) = 600 - 6 > 0 \\ x = 200 \Rightarrow A'(x) = 600 - 1200 < 0 \end{array} \right.$$

Logo, a área será máxima quando $x = 100\,m$. Neste caso, teremos

$$y = \frac{600 - 3.100}{2} = \frac{300}{2} = \underline{150\,m}$$