

Seja $f(x) = x - x^3$

- (a) Determine Df e seus zeros, se existirem.
- (b) Encontre os pontos críticos.
- (c) Determine os intervalos de crescimento e decréscimo e pontos de máximo e mínimo, se existirem.
- (d) Determine os intervalos onde a concavidade é voltada para cima (c.p.c) e onde é voltada para baixo (c.p.b). Determine os pontos de inflexão (se existirem).
- (e) Monte o esboço gráfico de f .

Solução:

(a) $Df = \mathbb{R}$.

zeros: onde intercepta o eixo horizontal;

ou seja, onde $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$



(b) pontos críticos: onde $f'(x) = 0$ ou onde $\nexists f'(x)$

$$f(x) = x - x^3$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0$$

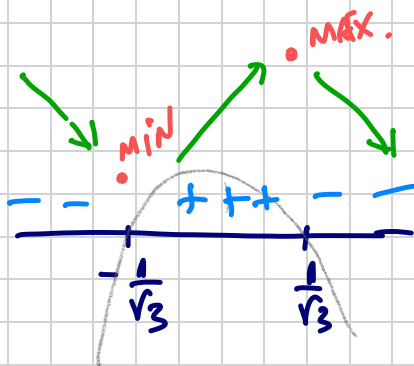
$$\Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{pontos críticos } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

↑
não vai acontecer
pois $f(x) = x - x^3$
é um polinômio.

(c) estudo do sinal de $f'(x)$:



$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

- f é crescente no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
- f é decrescente no intervalo $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$
- $\exists \text{ MAX. } (\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}}))$
 $\frac{1}{\sqrt{3}} - (\frac{1}{\sqrt{3}})^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} = 0$
- $\exists \text{ MIN. } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$
 $-\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{1}{\sqrt{3}})^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} < 0$

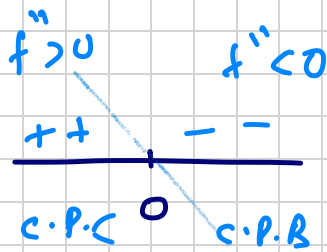
(d) para resolver o estudo da concavidade e P.F., precisamos estudar o sinal da derivada segunda.

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

$$\Rightarrow f''(x) = -6x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0} \quad \begin{array}{l} \text{CANDIDATO A} \\ \text{P.F.} \end{array}$$

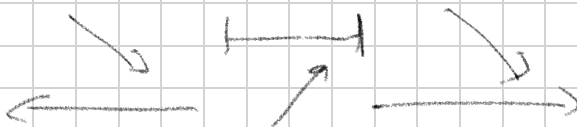
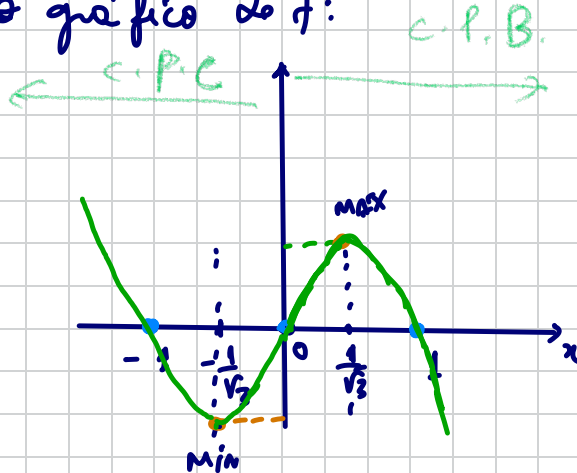
SINAL DE $f''(x)$:



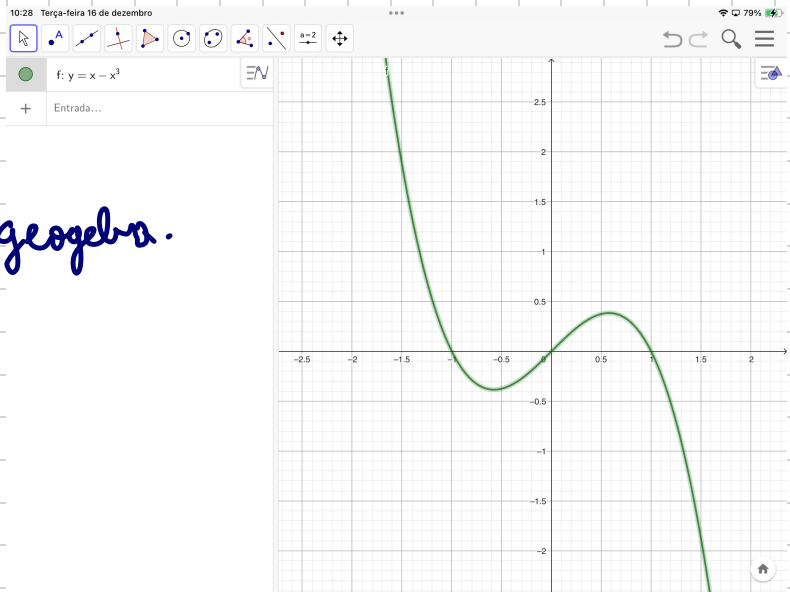
$$f''(x) = -6x$$

- f possui c.p.c. no intervalo $(-\infty, 0)$
- f possui c.p.b. no intervalo $(0, +\infty)$
- $\exists$ P.I. $(0, f(0)) = (0, 0 - 0^3) = (0, 0)$

(e) esboço gráfico de f :

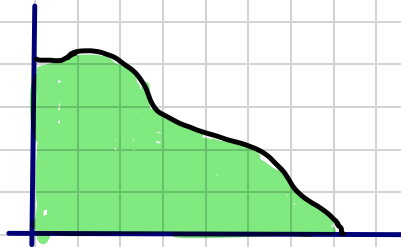


Estudo pelo geogebra.



INTEGRAIS:

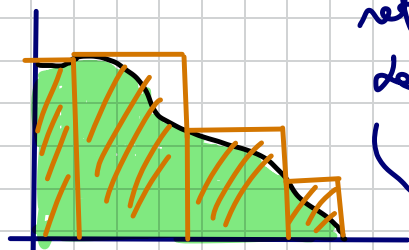
Como obter a medida da área de uma região, como a ilustrada abaixo?



A ideia consiste em subdividir esta região em regiões menores e calcular uma aproximação

"área aproximada", considerando a soma das regiões menores.

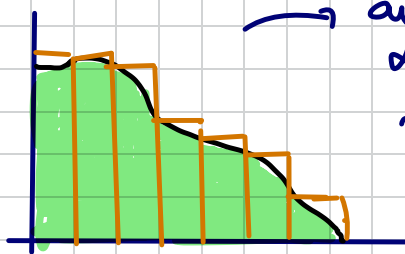
1ª Divisão "Grosseira":



Decompomos em 4 retângulos, a soma de suas áreas resulta numa área visualmente maior do que a área em verde.

Vamos subdividir o eixo horizontal em mais partes:

2ª Aproximação:

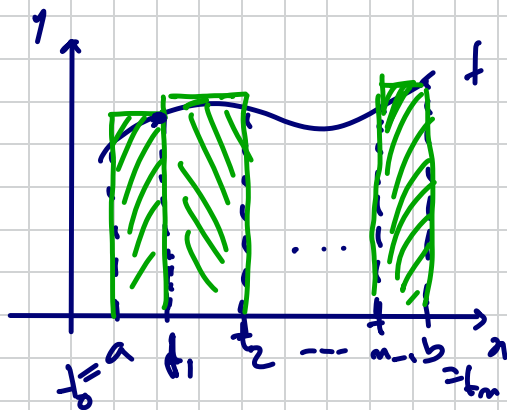


→ ainda é uma divisão grosseira, mas já é um pouco mais próxima da área real.

Repetindo-se esse processo indefinidamente, vamos, num processo de limite, chegar numa soma que vai representar a área verde.

Na prática, faz-se:

Seja $\gamma = f(x)$ definida em $[a, b]$,
toma-se $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma
partição do intervalo $[a, b]$ (definida); onde
 f é uma função contínua em $[a, b]$ e toma
 $f(c_i)$, onde c_i é o ponto de m.é. de $f(x)$ em
cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.



A área abaixo do gráfico de f em $[a, b]$
está aproximada por:

$A \cong$ soma das áreas dos retângulos.

$$A \cong (t_1 - t_0) \cdot f(c_1) + (t_2 - t_1) \cdot f(c_2) + \dots$$

$$\dots + (t_n - t_{n-1}) \cdot f(t_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

A área real será dada pelo limite quando o número de retângulos tende ao infinito.

Ou seja:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t_i = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Ou seja, a área real é o que chamaremos de integral definida de f no intervalo $[a, b]$.

Para calcular uma integral definida precisamos responder a uma questão importante.

Dada uma função cuja derivada é x^2 , qual é a função?

Ou seja, temos $f'(x) = x^2$. Qual é a $f(x)$?

$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

Qual a $f(x)$ tal que $f'(x) = \cos x$?

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C.$$

Simbolicamente, escrevemos:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad \text{e} \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

QUAL A FUNÇÃO
CUJA DERIVADA
É x^2 ?

QUAL A FUNÇÃO
CUJA DERIVADA
É $\cos x$?

A isto chamamos de integral indefinida ou antiderivada.

Então, as regras de integração indefinida são as regras de derivação vistas ao contrário.

Por exemplo:

$$y = x^k \Rightarrow y' = k \cdot x^{k-1} \cdot x^1$$



$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad ; k \neq -1.$$

Ex: 01) $\int x^4 dx = ?$

$$u = x \rightarrow du = dx.$$

$$k = 4.$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

02) $\int (1+2x)^3 dx = ?$

$$\int u^k du$$

$$u = 1+2x$$



$$du = 2dx$$

$$\hookrightarrow dx = \frac{du}{2}$$

Ans:im, number alter:

$$\begin{aligned}
 \int (1+2x)^3 dx &= \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{8} \cdot u^4 + C \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (1+2x)^4 + C.
 \end{aligned}$$

03) $\int \sqrt{x} dx = ?$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \int u^k du =$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$u = x \Rightarrow du = 1 dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{u^{k+1}}{k+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

De fato, se derivarmos a resposta, vamos obter:

$$\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c\right)' = \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}-1} + 0 = x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{x}}}$$

$$04) \int (x+2)^5 dx = ?$$

$$\int u^k du.$$

$$u = x+2 \Rightarrow du = 1 \cdot dx$$

$$k=5$$

$$\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + c$$

Assim:

$$\int (x+2)^5 dx = \int u^5 \cdot du = \frac{u^6}{6} + c = \underline{\underline{\frac{(x+2)^6}{6} + c}}$$

$$05) \int (4x-7)^3 dx = ?$$

$$\int n^k dn$$

$$k=3$$

$$\underline{n = 4x-7} \Rightarrow \underline{dn = 4 \cdot dx} \quad \hookrightarrow dx = \frac{dn}{4}$$

Answer:

$$\int \underline{(4x-7)}^3 dx = \int n^3 \cdot \frac{dn}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int n^3 dn =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{n^4}{4} + C = \frac{1}{16} \cdot n^4 + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot (4x-7)^4 + C}}$$