

Na aula passada iniciamos o estudo de transformações lineares. Recordando, uma função $T: V \rightarrow W$ (V e W espaços vetoriais) é uma transformação linear se, e somente se: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$(i) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$(ii) \quad T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$$

Def: Uma transformação linear $T: V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja quando sua imagem for um subconjunto dos reais, T é chamada de FUNCIONAL LINEAR.

Ex: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(x, y, z) = x + 2y - z$$

é um funcional linear.

Fica como exercício.

Def.: Uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ chama-se um OPERADOR LINEAR.

Ex.: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (x - y, 2x + y)$$

é um operador linear (exercício)

PROPOSIÇÃO: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, valem as seguintes propriedades:

01) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ (ou seja, uma transf. linear manda o neutro de V para o neutro de W)

02) $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$

DEMONSTRAÇÃO:

01) Basta notar que:

$$T(\vec{0}_V) = T(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = T(\vec{0}_V) + T(\vec{0}_V)$$

T é linear

Ou seja,

$$\cancel{T(\vec{0}_V)} = \cancel{T(\vec{0}_V)} + T(\vec{0}_V)$$

$$\Rightarrow T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

Obs.: Isto significa que se $T: V \rightarrow W$ for linear, então $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Então se, $T(\vec{0}_V) \neq \vec{0}_W$,

então T não é linear. Mas, note que;

se tivermos uma transformação $T: V \rightarrow W$

tal que $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, não significa que T seja linear. Ser ex. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada

por $T(x, y) = x^2 + y^2$ e tal que

$T(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$; porém T não é linear.

$$02) \quad T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v}):$$

De fato, basta observar que:

$$\underline{T(\vec{u} - \vec{v})} = T(\vec{u} + (-\vec{v})) = T(\vec{u}) + T(-\vec{v})$$

T é linear

$$= T(\vec{u}) + T(-1 \cdot \vec{v}) = T(\vec{u}) + (-1) \cdot T(\vec{v})$$

T é linear.

$$\underline{= T(\vec{u}) - T(\vec{v})}$$

□

prop.: Sejam V e W espaços vetoriais, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base de V , e sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n \in W$ vetores em W . Então existe uma única

transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que

$$T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 ; \quad T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 , \dots , \quad T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n .$$

DEMONSTR.: Sejam V e W espaços vetoriais e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ uma base de V e $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in W$ vetores quaisquer.

Seja $\vec{v} \in V$ um vetor qualquer.

Como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ é uma base para V , então existem únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \cdot \vec{v}_m.$$

Defina $T: V \rightarrow W$ a aplicação dada por:

$$T(\vec{v}) = \alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{w}_2 + \dots + \alpha_m \cdot \vec{w}_m.$$

Observe,

$$T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \vec{w}_i.$$

Então, em particular, tem-se que

$$\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= T(1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_m) \\ &= 1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1 \end{aligned}$$

$$T(\vec{v}_2) = T(0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_m) =$$

$$= 0 \cdot \vec{w}_1 + 1 \cdot \vec{w}_2 + 0 \cdot \vec{w}_3 + \dots + 0 \cdot \vec{w}_m$$

$$= \vec{w}_2$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{w}_j) = \vec{w}_j$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{w}_m) = \vec{w}_m.$$

Vamos mostrar que esta transformação é linear. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então, $\vec{u} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{w}_i$ e $\vec{v} = \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{w}_i$;

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Assim,

temos:

$$(i) \quad \underline{T(\vec{u} + \vec{v})} = T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{w}_i\right) =$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \cdot \vec{w}_i\right) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \cdot \vec{w}_i =$$

↑ propriedade do somatório ↑ aplica a T.

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \vec{w}_i = T(\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i}_{T(\vec{u})}) + T(\underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \vec{w}_i}_{T(\vec{v})})$$

↑
propriedade do
somatório

$$= \underline{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}.$$

(ii) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$: De fato:

$$\underline{T(\alpha \vec{u})} = T(\alpha \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i) = T(\sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \alpha_i) \cdot \vec{w}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \alpha_i) \cdot \vec{w}_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i = \alpha \cdot T(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i)$$

↑
propriedade do somatório

↑
aplica o T

$$= \alpha \cdot T(\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{w}_i}_{\vec{u}}) = \underline{\alpha \cdot T(\vec{u})}$$

Portanto, pelos itens (i) e (ii) segue que T é linear.

Resta mostrar a unicidade.

Temos $T: V \rightarrow W$

$$T(\vec{v}) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{w}_i$$

Seja $S: V \rightarrow W$ tal que (linear)

$$S(\vec{v}_i) = \vec{w}_i.$$

Então:

$$T(\vec{v}) = T\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i}_{\vec{v}}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{w}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot S(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n S(\alpha_i \vec{v}_i) =$$

$\uparrow$
 S é linear

$$= S\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i}_{\vec{v}}\right) = S(\vec{v})$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = S(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Ou seja, a transf. linear é única.

□

Ex: Encontre a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(1, -1) = \underline{(2, 3, 0)} \\ \text{e } T(0, 1) = \underline{(1, -1, 1)}.$$

Solução: Note que o conjunto $\{(1, -1), (0, 1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$; pois é um conj. L.I. e a $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. ↘ exercício.

Então, seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim:

$$(x, y) = \alpha \cdot (1, -1) + \beta \cdot (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha + \beta = y \end{cases}$$

$$\hookrightarrow -x + \beta = y \Rightarrow \beta = x + y$$

Assim:

$$(x, y) = \alpha \cdot (1, -1) + \beta \cdot (0, 1)$$

$$(x, y) = x \cdot (1, -1) + (x + y) \cdot (0, 1)$$

Aplicando T , que deve ser linear, tenemos:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(x \cdot (1, -1) + (x+y) \cdot (0, 1)\right) \\ &= T(x(1, -1)) + T((x+y)(0, 1)) \end{aligned}$$

T deve ser linear

$$x \cdot \underbrace{T(1, -1)}_{(2, 3, 0)} + (x+y) \cdot \underbrace{T(0, 1)}_{(1, -1, 1)} =$$

$$= x \cdot (2, 3, 0) + (x+y) \cdot (1, -1, 1)$$

$$= (\underline{2x}, \underline{3x}, \underline{0}) + (\underline{x+y}, \underline{-x-y}, \underline{x+y})$$

$$= (\underline{3x+y}, \underline{2x-y}, \underline{x+y})$$

Resp.: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por:

$$T(x, y) = (3x+y, 2x-y, x+y)$$

OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES:

Def: Sejam $T_1, T_2: V \rightarrow W$ duas transformações lineares de V em W . Definimos as transformações

$$T_1 + T_2: V \rightarrow W;$$

$$(T_1 + T_2)(\vec{v}) := T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v});$$

e

$$T_1 - T_2: V \rightarrow W$$

$$(T_1 - T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v}) - T_2(\vec{v}).$$

Afirmamos que $T_1 + T_2$ e $T_1 - T_2$ também são transformações lineares.

Ou seja, a soma de transformações lineares continua sendo uma transf. linear e a diferença de transf. lineares continua sendo uma transf. linear.

De fato; note que, sendo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \underline{(T_1 + T_2)(\vec{u} + \vec{v})} = T_1(\vec{u} + \vec{v}) + T_2(\vec{u} + \vec{v}) = \\
 & = T_1(\vec{u}) + T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{u}) + T_2(\vec{v}) = \\
 & = (T_1(\vec{u}) + T_2(\vec{u})) + (T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})) = \\
 & = \underline{(T_1 + T_2)(\vec{u})} + (T_1 + T_2)(\vec{v})
 \end{aligned}$$

T_1, T_2
são lineares

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \underline{(T_1 + T_2)(\alpha \vec{u})} = T_1(\alpha \vec{u}) + T_2(\alpha \vec{u}) = \\
 & = \alpha \cdot T_1(\vec{u}) + \alpha \cdot T_2(\vec{u}) \\
 & = \alpha \cdot (T_1(\vec{u}) + T_2(\vec{u})) = \underline{\alpha \cdot (T_1 + T_2)(\vec{u})}
 \end{aligned}$$

T_1, T_2 são
lineares

Analogamente faz-se para $T_1 - T_2$.

Ex: Sejam $T_1, T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por

$$T_1(x, y, z) = (x - 2y, x + z)$$

e

$$T_2(x, y, z) = (z, x - 2y)$$

Então $T_1 + T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ será:

$$\underline{(T_1 + T_2)(x, y, z) = T_1(x, y, z) + T_2(x, y, z)}$$

$$= (x - 2y, x + z) + (z, x - 2y)$$

$$= \underline{(x - 2y + z, 2x - 2y + z)},$$

que é linear (pois T_1 e T_2 o são).

Def: Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: W \rightarrow U$

transformações lineares. Definimos a composição: $T_2 \circ T_1: V \rightarrow U$ por

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{u}) = T_2(T_1(\vec{u}))$$

PROPOSIÇÃO: A composição de transformações lineares resulta em uma transformação linear.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: W \rightarrow U$ transf. lineares. Definindo

$$T_2 \circ T_1: V \rightarrow U \text{ por}$$

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{u}) = T_2(T_1(\vec{u}));$$

queremos mostrar que $T_2 \circ T_1$ é linear. De fato, dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(i) (T_2 \circ T_1)(\vec{u} + \vec{v}) = (T_2 \circ T_1)(\vec{u}) + (T_2 \circ T_1)(\vec{v});$$

$$\underline{(T_2 \circ T_1)(\vec{u} + \vec{v})} = T_2(T_1(\vec{u} + \vec{v})) = T_2(T_1(\vec{u}) + T_1(\vec{v}))$$

T_1 é linear

$$= T_2(T_1(\vec{u})) + T_2(T_1(\vec{v})) =$$

T_2 é linear

$$= \underline{(T_2 \circ T_1)(\vec{u}) + (T_2 \circ T_1)(\vec{v})}$$

$$(ix) \quad (T_2 \circ T_1)(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot (T_2 \circ T_1)(\vec{u}) :$$

De fait :

$$\underline{(T_2 \circ T_1)(\alpha \vec{u}) = T_2(T_1(\alpha \vec{u})) = T_2(\alpha \cdot T_1(\vec{u})) =}$$

$\uparrow$
 T_1 est linéaire

$$= \alpha \cdot T_2(T_1(\vec{u})) = \alpha \cdot \underline{(T_2 \circ T_1)(\vec{u})}$$

$\uparrow$
 T_2 est linéaire

De (i) & (ii) résulte que $T_2 \circ T_1$ est transf. linéaire.

□
