

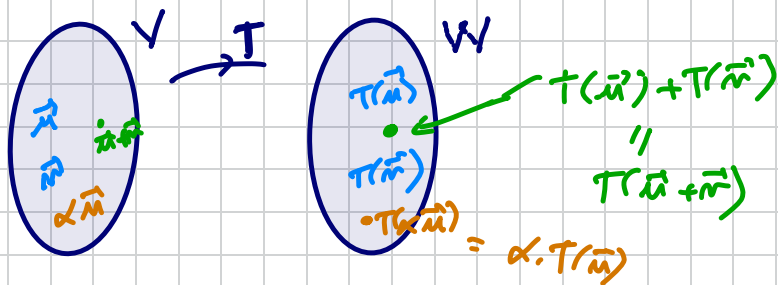
TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Def: Sejam V e W espaços vetoriais^(*).

Chama-se transformação linear toda aplicação $T: V \rightarrow W$, tal que preserve a estrutura de espaço vetorial, ou seja, dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$(i) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$$



(*) Lembre-se que as operações em V e em W , embora não estejam explícitas, estão presentes.

$$V = (V, +_V, \cdot_V) \quad ; \quad W = (W, +_W, \cdot_W)$$

EXEMPLOS:

01) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x + 2y, x, x - y)$$

T é linear, pois, dados $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (a, b)$ e

dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(i) \underline{T(\vec{u} + \vec{v})} = T((x, y) + (a, b)) =$$

$$= T(x + a, y + b) = (x + a + 2(y + b), x + a, x + a - (y + b))$$

↑
aplicando T

$$= (x + a + 2y + 2b, x + a, x + a - y - b)$$

$$= \underbrace{(x + 2y, x, x - y)}_{T(x, y)} + \underbrace{(a + 2b, a, a - b)}_{T(a, b)}$$

$$= \underbrace{T(x, y)}_{\vec{u}} + \underbrace{T(a, b)}_{\vec{v}} = \underline{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$$

Portanto, obtenemos

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

$$(ii) \quad T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})?$$

De fato:

$$\begin{aligned} T(\alpha \cdot \vec{u}) &= T(\alpha \cdot (x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = \\ &= (\alpha x + 2 \cdot (\alpha y), \alpha x, \alpha x - \alpha y) = \\ &= (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x, \alpha x - \alpha y) = \\ &= (\alpha(x + 2y), \alpha x, \alpha(x - y)) = \\ &= \alpha \cdot (\underbrace{x + 2y, x, x - y}_{T(x, y)}) = \alpha \cdot \underbrace{T(x, y)}_{\vec{u}} = \alpha \cdot \underbrace{T(\vec{u})} \end{aligned}$$

Logo, vale (ii).

Portanto, de (i) e (ii) tem-se que

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

- $T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$;

ou seja ; $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada é uma transformação linear.

02) $T: (C[a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x) dx ;$$

onde

$$C[a, b] = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } [a, b] \}$$

Vamos mostrar que a transformação T acima definida é linear. De fato, sejam

$\vec{u} = f(x)$ e $\vec{v} = g(x)$ (funções contínuas em $[a, b]$) ; ou seja, $\vec{u}, \vec{v} \in C[a, b]$; e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(f(x) + g(x)) =$

aplica a T

$$= \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx =$$

↑
PROPRIEDADE DA INTEGRAL

$$= T(\underbrace{f(x)}_{\vec{u}}) + T(\underbrace{g(x)}_{\vec{v}}) = \underbrace{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$$

(ii) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$?

De fato:

$$\underbrace{T(\alpha \vec{u})}_{\text{}} = T(\alpha \cdot f(x)) = \int_a^b \alpha \cdot f(x) dx =$$

↑
propriedade da integral

$$= \alpha \cdot \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{T(f(x))} = \alpha \cdot T(\underbrace{f(x)}_{\vec{u}}) = \alpha \cdot \underbrace{T(\vec{u})}_{\text{}}.$$

Outra seja, $T(f(x)) = \int_a^b f(x) dx$ é uma transformação linear do espaço vetorial $C[a, b]$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}$.

03) $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{22}, a_{12}, 0)$$

AF: T é transformação linear.

De fato, sejam

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \text{ e } \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Então:

$$(i) \quad \underline{T(\vec{u} + \vec{v})} = T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) =$$

$$= T \begin{pmatrix} x+a & y+b \\ w+c & z+d \end{pmatrix} = (x+a+z+d, y+b, 0)$$

aplica a T

$$= \underline{(x+z, y, 0)} + \underline{(a+d, b, 0)} =$$

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= T \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underline{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$$

$$(ii) \text{ ¿ } T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u}) \text{ ?}$$

De fato:

$$\underline{T(\alpha \cdot \vec{u})} = T\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha w & \alpha z \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha x + \alpha z, \alpha y, 0) =$$

↑
aplica a T

$$= (\alpha(x+z), \alpha y, \alpha \cdot 0)$$

$$= \alpha \cdot \underbrace{(x+z, y, 0)}_{T\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}} = \alpha \cdot T\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}}_{\vec{u}}\right) = \underline{\alpha \cdot T(\vec{u})}.$$

Portanto, pelos itens (i) e (ii) segue que T é uma transformação linear.

04) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 3y - z, y + z, x - z).$$

Afirmamos que T é linear.

De fato, dados $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$ em $\mathbb{R}^3$, e dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T((x, y, z) + (a, b, c)) =$$

$$= T(x+a, y+b, z+c) =$$

↑
aplica T

$$= (x+a + 3 \cdot (y+b) - (z+c), y+b + z+c, x+a - (z+c))$$

$$= (\underbrace{x+a}_{\text{aplica } T} + \underbrace{3y+3b}_{\text{aplica } T} - \underbrace{z-c}_{\text{aplica } T}, \underbrace{y+b}_{\text{aplica } T} + \underbrace{z+c}_{\text{aplica } T}, \underbrace{x+a}_{\text{aplica } T} - \underbrace{z-c}_{\text{aplica } T})$$

$$= (\underbrace{x+3y-z}_{T(x,y,z)}, y+z, x-z) + (\underbrace{a+3b-c, b+c, a-c}_{T(a,b,c)})$$

$$= T(x, y, z) + T(a, b, c) = \underline{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$$

$$(ii) \quad \text{¿ } T(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})?$$

De fato:

$$\underline{T(\alpha \vec{u})} = T(\alpha \cdot (x, y, z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$= (\alpha x + 3 \cdot \alpha y - \alpha z, \alpha y + \alpha z, \alpha x - \alpha z)$$

$$= (\alpha(x + 3y - z), \alpha(y + z), \alpha(x - z))$$

$$= \alpha \cdot (\underline{x + 3y - z, y + z, x - z})$$

$$T(x, y, z)$$

$$= \alpha \cdot T(x, y, z) = \underline{\alpha \cdot T(\vec{u})}$$

De (i) e (ii) segue que T é transformação linear.

05) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x, y) = (x+y, y, x+1)$$

T não é linear. De fato; dados

$\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (a, b)$; por um lado:

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T((x, y) + (a, b)) = T(x+a, y+b) = \\ &= (\underline{x+a+y+b}, y+b, x+a+1) \end{aligned}$$

Se por outro lado:

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) &= T(x, y) + T(a, b) = \\ &= (x+y, y, x+1) + (a+b, b, a+1) \\ &= (x+y+a+b, y+b, x+1+a+1) = \\ &= (\underline{x+a+y+b}, y+b, x+a+1+1) \end{aligned}$$

$\neq (x+a+y+b, y+b, x+a+1)$ estraga a linearidade.

$$\text{Logo, } T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Então, $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada não é linear.

obs. Se alguma componente que define uma transformação $T: V \rightarrow W$ tiver um aditivo com constante, ou potências ou produtos envolvendo essas componentes, perde a linearidade. Assim, as transformações:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y) = (x + 2y, 4y)$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; T(x, y) = (x, y + 1)$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (x, x + y, y \cdot z)$$

não são lineares.

"estragam" a linearidade.

Exercício: Mostre que a transformação

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por}$$

$$T(x, y) = (2x - y, x + y, x)$$

é uma transformação linear.

Solução: Dados $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (a, b)$ vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(i) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) :$$

De fato,

$$\underline{T(\vec{u} + \vec{v})} = T((x, y) + (a, b)) = T(x+a, y+b) =$$

$$= (2(x+a) - (y+b), x+a+y+b, x+a)$$

$$= (2x+2a - y-b, x+y+a+b, x+a)$$

$$= (2x - y, x+y, x) + (2a - b, a+b, a)$$

$$= T(x, y) + T(a, b) = \underline{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}.$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u}):$$

De fato:

$$\begin{aligned} \underline{T(\alpha \cdot \vec{u})} &= T(\alpha \cdot (x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = \\ &= (2(\alpha x) - \alpha y, \alpha x + \alpha y, \alpha x) = \\ &= (\alpha(2x - y), \alpha(x + y), \alpha x) = \\ &= \alpha \underbrace{(2x - y, x + y, x)}_{T(x, y)} = \alpha \cdot \underbrace{T(x, y)}_{\vec{u}} = \\ &= \underline{\alpha \cdot T(\vec{u})}. \end{aligned}$$

Logo, vale as (i) e (ii), mostrando que
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2x - y, x + y, x)$ é uma
transformação linear.
