

Na aula passada estudamos o conceito de coordenadas de um vetor numa dada base de um espaço vetorial V .

Seja $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base em V ; dado um vetor $\vec{w} \in V$, então, existe uma representação única de $\vec{w}$ na base β , dada por

$$\vec{w} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n;$$

e assim:

$$[\vec{w}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{COORDENADAS DE } \vec{w} \text{ NA BASE } \beta.$$

Dadas duas bases β e β_1 de V , então, um vetor $\vec{w}$ pode ser representado tanto em uma base quanto outra (unicamente em

cade uma).

Vimos que, a mudança de coordenadas de um vetor $\vec{w}$, de uma base β para uma base β_1 , é dada por:

$$[\vec{w}]_{\beta_1} = \underbrace{[I]_{\beta_1}^{\beta}}_{\text{MATRIZ DE MUDANÇA DE COORDENADAS DA BASE } \beta \text{ PARA A BASE } \beta_1} \cdot [\vec{w}]_{\beta}$$

→ MATRIZ DE MUDANÇA DE COORDENADAS DA BASE β PARA A BASE β_1 .

Vimos um exemplo naquela aula. Vejamos outro exemplo.

EX: Dadas as bases β e β_1 de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, por:

$$\beta = \{(1, 1, 0); (0, 1, 2); (0, 0, 3)\}$$

$$\gamma = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -1)\}.$$

Determine a matriz $[I]_{\gamma}^{\beta}$ de mudança

da base β para a base γ .

Solução: Denote os elementos das bases

β e γ por:

$$\beta = \{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{v}_1}; \underbrace{(0, 1, 2)}_{\vec{v}_2}; \underbrace{(0, 0, 3)}_{\vec{v}_3} \}$$



$$\gamma = \{ \underbrace{(1, 1, 1)}_{\vec{w}_1}; \underbrace{(1, 0, 1)}_{\vec{w}_2}; \underbrace{(1, 0, -1)}_{\vec{w}_3} \}.$$

Queremos $[I]_{\gamma}^{\beta}$. (ou seja, estamos

na base β e queremos representar na base γ)

Resposta:

$$\vec{v}_1 = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \cdot \vec{w}_2 + a_{31} \cdot \vec{w}_3 \quad (\text{I})$$

$$\vec{v}_2 = a_{12} \cdot \vec{w}_1 + a_{22} \cdot \vec{w}_2 + a_{32} \cdot \vec{w}_3 \quad (\text{II})$$

$$\vec{v}_3 = a_{13} \cdot \vec{w}_1 + a_{23} \cdot \vec{w}_2 + a_{33} \cdot \vec{w}_3 \quad (\text{III})$$

De (I) obtenemos:

$$\vec{w}_1 = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \cdot \vec{w}_2 + a_{31} \cdot \vec{w}_3$$

$$(1, 1, 0) = a_{11} \cdot (1, 1, 1) + a_{21} \cdot (1, 0, 1) + a_{31} \cdot (1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{11} = 1 \\ a_{11} + a_{21} - a_{31} = 0 \end{cases} \rightarrow a_{11} = 1$$

$$\begin{cases} 1 + a_{21} + a_{31} = 1 \\ 1 + a_{21} - a_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{21} + a_{31} = 0 \\ + \quad a_{21} - a_{31} = -1 \end{cases}$$

$$2 \cdot a_{21} = -1$$

$$\Rightarrow a_{21} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{21} + a_{31} = 0 \Rightarrow a_{31} = -(-\frac{1}{2}) \Rightarrow a_{31} = \frac{1}{2}$$

De (II), obtenemos:

$$\vec{w}_2 = a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2 + a_{32} \vec{w}_3$$

$$(0, 1, 0) = a_{12} \cdot (1, 1, 1) + a_{22} \cdot (1, 0, 1) + a_{32} \cdot (1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{12} = 1 \\ a_{12} + a_{22} - a_{32} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{a_{12} = 1}$$

$$\begin{cases} a_{22} + a_{32} = -1 \\ a_{22} - a_{32} = -1 \end{cases}$$

$$2 \cdot a_{22} = -2 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -1}$$

$$\Rightarrow a_{32} = -1 - a_{22}$$

$$a_{32} = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_{32} = 0}$$

De (III), obtenemos:

$$\vec{r}_3 = a_{13} \vec{w}_1 + a_{23} \vec{w}_2 + a_{33} \vec{w}_3$$

$$(0, 0, 3) = a_{13} \cdot (1, 1, 1) + a_{23} \cdot (1, 0, 1) + a_{33} \cdot (1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{13} = 0 \\ a_{13} + a_{23} - a_{33} = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{a_{13} = 0}$$

$$+ \begin{cases} a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{23} - a_{33} = 3 \end{cases}$$

$$2 \cdot a_{23} = 3 \Rightarrow \boxed{a_{23} = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow a_{33} = -a_{23} \Rightarrow \boxed{a_{33} = -\frac{3}{2}}$$

Por tanto, obtenemos:

$$[I]_B^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, Por exemplo dada um vetor $\vec{w} = (2, 1, 0)$; vamos determinar $[\vec{w}]_B$ e $[\vec{w}]_B$.

• $[\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$; onde:

$$(2, 1, 0) = a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a+b = 1 \\ 3c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a=2 \\ c=0 \end{matrix}$$

$$a+b=1 \Rightarrow b=1-a$$

$$b=1-2$$

$$b=-1$$

$$\Rightarrow [\vec{w}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet [\vec{w}]_{\gamma} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

$$\underbrace{(2, 1, 0)}_{\vec{w}} = a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (1, 0, 1) + c \cdot (1, 0, -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ a=1 \\ a+b-c=0 \end{cases} \rightarrow a=1$$

$$\begin{cases} b+c = 2-1 \\ b-c = 0-1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} b+c = 1 \\ b-c = -1 \end{cases} \\ + \\ \hline 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0} \end{array}$$

$$b+c = 1 \Rightarrow c = 1-b$$

$$c = 1-0$$

$$\boxed{c=1}$$

Sobretudo;

$$\underline{[\vec{w}]_g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De fato, $[\vec{w}]_g$ poderia ser encontrado de outra forma, uma vez conhecendo $[\vec{w}]_\beta$ e a matriz de mudança $[I]_\gamma^\beta$:

$$[\vec{w}]_{\gamma} = [I]_{\gamma}^{\beta} \cdot [\vec{w}]_{\beta}$$

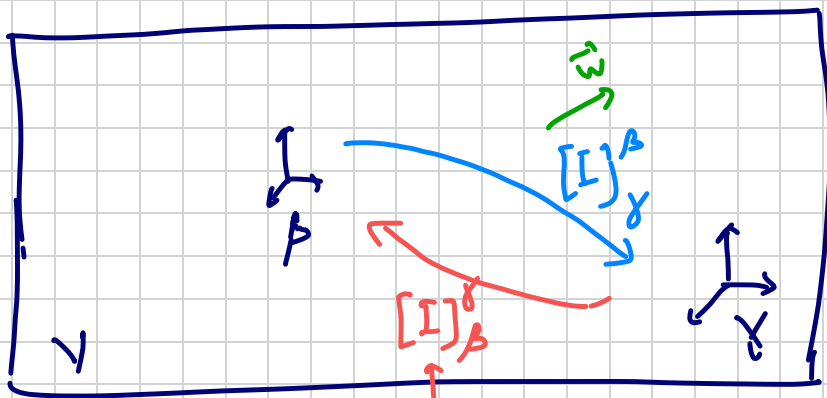
$$\underline{[\vec{w}]_{\gamma}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$



TEOREMA: Sejam V um espaço vetorial e β e γ duas bases de V . Então a matriz de mudança de base $[I]_{\gamma}^{\beta}$ é invertível, e a sua inversa será:

$$([I]_{\gamma}^{\beta})^{-1} = [I]_{\beta}^{\gamma}.$$



esta matriz será inversa da outra.

DEMONSTRA: Dado $\vec{w} \in V$ um vetor qualquer em V e sejam B e Y duas bases de V . Então, tem-se que

$$[\vec{w}]_Y = [I]_Y^B [\vec{w}]_B \quad (*)$$

Como $[I]_Y^B$ é invertível, pois, c.f. resultados anteriores, ela possui de uma resolução de sistema linear de solução única, devido à unicidade da representação de um vetor numo dada base. (outra propriedade).

Então existe $([I]_Y^B)^{-1}$ inversa de $[I]_Y^B$.

Com isso, multiplicando (*) à esquerda por $[\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta}{}^{-1}$, temos obter:

$$[\vec{w}]_{\gamma} = [\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta} \cdot [\vec{w}]_{\beta}$$

$$\Rightarrow ([\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta})^{-1} \cdot [\vec{w}]_{\gamma} = \underbrace{([\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta})^{-1} [\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta}}_{\text{"I"}} \cdot [\vec{w}]_{\beta}$$

$$([\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta})^{-1} \cdot [\vec{w}]_{\gamma} = [\vec{w}]_{\beta}$$

$$\Rightarrow [\vec{w}]_{\beta} = \underbrace{([\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta})^{-1}}_{\text{esta será a matriz de mudança da base } \gamma \text{ para a base } \beta, \text{ ou seja; } [\mathbf{I}]_{\beta}^{\gamma}} \cdot [\vec{w}]_{\gamma}$$

esta será a matriz de mudança da base γ para a base β , ou seja; $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\gamma}$.

Seja unicidade:

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\gamma} = ([\mathbf{I}]_{\gamma}^{\beta})^{-1}$$

□

EXTRA : RESOLUÇÃO QUESTÃO 03 DA PROVA:

(a) mostrar que $\det A^m = (\det A)^m$

solução : Note que

$$\det A^m = \det \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{m \text{ fatores}} =$$

$$= \det A \cdot \underbrace{\det A \cdots \det A}_{m \text{ fatores}} = (\det A)^m$$

o determinante do produto é o produto dos determinantes.

2ª parte: A tal que $\det A^2 = 0$.

mostrar: A não é invertível.

$$0 = \det A^2 = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 0 \Leftrightarrow \det A = 0;$$

Logo, A não é invertível.

(b) Se $A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $\det B = -1$.

verificar se A é invertível.

Sol.: $\det(A^T \cdot B^T) = \underbrace{\det A^T}_{\det A} \cdot \underbrace{\det B^T}_{\det B} = \det A \cdot \det B$.

Sei um lado;

$$\det(A^T \cdot B^T) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 16 = 2$$

$$\Rightarrow 2 = \det(A^T \cdot B^T) = \det A \cdot \det B$$

$$\Rightarrow \det A \cdot (-1) = 2$$

(dado no enunciado)

$$\Rightarrow \boxed{\det A = -2 \neq 0} \cdot \text{Logo, } A \text{ é invertível.}$$