

Obs.: Dada uma base β de um espaço vetorial V , então, qualquer vetor $\vec{v} \in V$ é representado como combinação linear dos vetores da base β .

Perguntamos: essa representação é única?

Felizmente, a resposta é afirmativa. Se a representação em uma dada base não fosse única, então poderia ser ambígua.

Ou seja, tem-se a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO: A representação de um vetor $\vec{v}$ numa dada base β em um espaço vetorial V é única.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base de um espaço vetorial V e considere $\vec{w}$ um vetor em V . Vamos mostrar que a representação de $\vec{w}$ na base β é única.

De fato; se

$$\vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{r}_1 + \alpha_2 \vec{r}_2 + \dots + \alpha_m \vec{r}_m$$

e

$$\vec{w} = a_1 \cdot \vec{r}_1 + a_2 \vec{r}_2 + \dots + a_m \vec{r}_m$$

As representações de $\vec{w}$ na base β , são:

$$\vec{0} = \vec{w} - \vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{r}_1 + \dots + \alpha_m \vec{r}_m - a_1 \cdot \vec{r}_1 - \dots - a_m \vec{r}_m$$

$$\vec{0} = (\alpha_1 - a_1) \cdot \vec{r}_1 + (\alpha_2 - a_2) \vec{r}_2 + \dots + (\alpha_m - a_m) \cdot \vec{r}_m$$

Como os vetores $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m$ são l.i.,
(pois formam a base β), segue que

$$\alpha_1 - a_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 - a_2 = 0, \dots, \quad \alpha_m - a_m = 0$$

Ou seja;

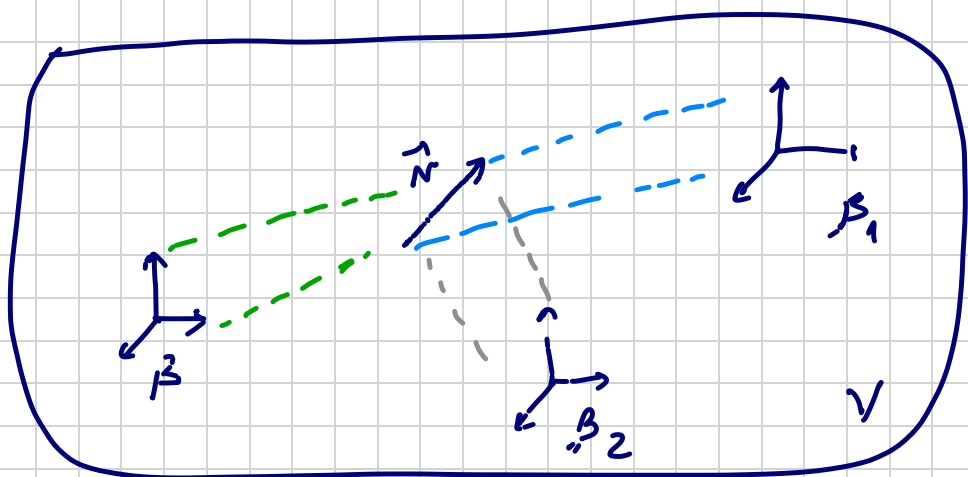
$$\alpha_1 = a_1 \quad ; \quad \alpha_2 = a_2, \dots, \quad \alpha_m = a_m.$$

Ou seja a representação de $\vec{w}$ numa
base β de V é única.

□

MUDANÇA DE BASE EM UM ESPAÇO VETORIAL:

Podemos pensar, considerando um espaço vetorial V , que cada base do mesmo seria uma forma de "olhar" os vetores do espaço; e cada olhar é um olhar diferente.



① "olhar" de um vetor em cada base traduz-se no vetor possuir representações diferentes.

Muitas vezes, um dado problema pode ser difícil quando expresso numa dada base, mas

tornar-se simples em outra base mais adequada. Para estudarmos questões dessa forma é necessário efetuar MUDANÇAS DE BASE.

Antes, porém, precisamos de alguns conceitos.

COORDENADAS DE UM VETOR:

Dado um vetor $\vec{v} \in V$ e $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ uma base para V .

Então, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

Definimos as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base β como os seus coeficientes, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Ou seja:

$$[\vec{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

→ COORDENADAS DE $\vec{v}$
NA BASE β .

Ex-1 $V = \mathbb{R}^2$ e seja $\beta := \{(1,1), (-1,2)\}$
uma base de V .

Dado $\vec{w} = (2, -1)$; quais são as
coordenadas de $\vec{w}$ na base β ?

Solução: $\vec{w} = a_1 \cdot (1,1) + a_2 \cdot (-1,2)$

$$(2, -1) = a_1 \cdot (1,1) + a_2 \cdot (-1,2)$$

$$(2, -1) = (a_1 - a_2, a_1 + 2a_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 2 \leadsto a_1 = 2 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 = -1 \end{cases}$$

↓

$$2 + a_2 + 2a_2 = -1$$

$$3 \cdot a_2 = -3$$

$$\boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 = 2 + a_2$$

$$a_1 = 2 - 1$$

$$\boxed{a_1 = 1}$$

Portanto, temos: $[\vec{w}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ou seja;

$$[i(2, -1)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obs: Uma base β de um espaço vetorial V é ordenada, e a ordem é exatamente a ordem em que os vetores estão listados.

De fato, considere, novamente $V = \mathbb{R}^2$ e seja $\beta_1 = \{(-1, 2), (1, 1)\}$. [repare que os

vetores que compõem a base β_1 são os mesmos que compõem a base β , mas numa ordem diferente].

Considere representar $[\vec{w}]_{\beta_1}$, onde $\vec{w} = (2, -1)$, o mesmo vetor tomado no exemplo anterior.

Assim:

$$(2, -1) = a_1 \cdot (-1, 2) + a_2 \cdot (1, 1)$$

$$(2, -1) = (-a_1 + a_2; 2a_1 + a_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 + a_2 = 2 \\ 2a_1 + a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leadsto a_2 = 2 + a_1 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

↓

$$2 \cdot a_1 + 2 + a_1 = -1$$

$$3 \cdot a_1 = -3 \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$$

$$\Rightarrow a_2 = 2 + a_1$$

$$a_2 = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$$

Portanto, obtemos

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MUDANÇA DE BASE:

Dados duas bases $\beta = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ e

$\beta_1 = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \}$ duas bases de um espaço vetorial V . (bases ordenadas)

Queremos encontrar uma fórmula ou técnica que permita mudar a representação de um dado vetor de uma base para outra.

Dado $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V$; temos que:

$$(*) \quad \vec{u} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n \quad (\text{na base } \beta)$$

e

$$\vec{u} = y_1 \cdot \vec{w}_1 + y_2 \vec{w}_2 + \dots + y_n \cdot \vec{w}_n \quad (\text{na base } \beta_1)$$

Da seja, temos:

$$[\vec{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\vec{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Em particular, os vetores $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ da base β_1 são vetores de V . Representando-os com a base β , teremos:

$$\vec{w}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + a_{31}\vec{v}_3 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m$$

$$\vec{w}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{32}\vec{v}_3 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m$$

⋮

$$\vec{w}_m = a_{1m}\vec{v}_1 + a_{2m}\vec{v}_2 + a_{3m}\vec{v}_3 + \dots + a_{mm}\vec{v}_m$$

Assim, $\vec{u}$ na base β_1 ficará representado por:

$$\vec{u} = \gamma_1 \vec{w}_1 + \gamma_2 \vec{w}_2 + \dots + \gamma_m \vec{w}_m$$

$$\vec{u} = \gamma_1 (a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m) + \gamma_2 (a_{12}\vec{v}_1 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m) + \dots + \gamma_m (a_{1m}\vec{v}_1 + \dots + a_{mm}\vec{v}_m)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = (a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{m1}\gamma_m)\vec{v}_1 + \dots$$

(xx);

$$\dots + (a_{m1}\gamma_1 + a_{m2}\gamma_2 + \dots + a_{mm}\gamma_m)\vec{v}_m,$$

que está, agora, representado na base β .

Dada unicidade da representação de um vetor em uma dada base, de $(\vec{r})$ e $(\vec{e}_i)$, segue que:

$$\underbrace{x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_m \cdot \vec{e}_m}_{\text{base}} = \vec{r} = \underbrace{(a_{11} \gamma_1 + \dots + a_{1m} \gamma_m)}_{\text{base}} \vec{e}_1 + \dots + \underbrace{(a_{m1} \gamma_1 + \dots + a_{mm} \gamma_m)}_{\text{base}} \vec{e}_m$$

Daí se vê, obtém-se:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} \gamma_1 + a_{12} \gamma_2 + \dots + a_{1m} \gamma_m \\ x_2 = a_{21} \gamma_1 + a_{22} \gamma_2 + \dots + a_{2m} \gamma_m \\ \vdots \\ x_m = a_{m1} \gamma_1 + a_{m2} \gamma_2 + \dots + a_{mm} \gamma_m \end{cases} ;$$

O que, em representação matricial, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{[\vec{r}]_{\beta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}}_{[\Gamma]_{\beta}^{\beta_1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}}_{[\vec{r}]_{\beta_1}}$$

Denotamos por $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ como a matriz de mudança de coordenadas de base β_1 para a base β .

Simbolicamente, obtemos:

$$[u]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta_1} \cdot [u]_{\beta_1}$$

(FÓRMULA DA MUDANÇA DE BASE)

ex: Dadas as bases

$$\beta = \{ \overbrace{(1, 1, 0)}^{\vec{n}_1}; \overbrace{(0, -1, 1)}^{\vec{n}_2}; \overbrace{(-1, 1, 1)}^{\vec{n}_3} \}$$

$$\beta_1 = \{ \overbrace{(1, 2, 1)}^{\vec{w}_1}; \overbrace{(1, 1, 1)}^{\vec{w}_2}; \overbrace{(-1, 0, 3)}^{\vec{w}_3} \}$$

bases de $\mathbb{R}^3$. Achar a matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta_1}$.

$$\vec{w}_1 = a_{11} \cdot \vec{n}_1 + a_{12} \cdot \vec{n}_2 + a_{13} \cdot \vec{n}_3 \quad (\text{I})$$

$$\vec{w}_2 = a_{21} \cdot \vec{n}_1 + a_{22} \cdot \vec{n}_2 + a_{23} \cdot \vec{n}_3 \quad (\text{II})$$

$$\vec{w}_3 = a_{31} \cdot \vec{n}_1 + a_{32} \cdot \vec{n}_2 + a_{33} \cdot \vec{n}_3 \quad (\text{III})$$

De (I), tenor:

$$(1, 2, 1) = a_{11} \cdot (1, 1, 0) + a_{21} \cdot (0, -1, 1) + a_{31} \cdot (-1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{31} = 1 \rightarrow a_{11} = 1 + a_{31} \\ a_{11} - a_{21} + a_{31} = 2 \\ a_{21} + a_{31} = 1 \rightarrow a_{21} = 1 - a_{31} \end{cases}$$

$$a_{11} - a_{21} + a_{31} = 2$$

$$1 + a_{31} - (1 - a_{31}) + a_{31} = 2$$

$$1 + a_{31} - 1 + a_{31} + a_{31} = 2$$

$$3 \cdot a_{31} = 2 \Rightarrow a_{31} = \frac{2}{3}$$

$$a_{11} = 1 + a_{31}$$

$$a_{11} = 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{5}{3}$$

$$a_{21} = 1 - a_{31}$$

$$a_{21} = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow a_{21} = \frac{1}{3}$$

De (II), obtenemos:

$$(0, -1, 1) = \underline{a_{12}} \cdot (1, 1, 0) + \underline{a_{22}} (0, -1, 1) + \underline{a_{32}} (-1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a_{12} - a_{32} = 0 \rightarrow a_{12} = a_{32} \\ a_{12} - a_{22} + a_{32} = -1 \\ a_{22} + a_{32} = 1 \rightarrow a_{22} = 1 - a_{32} \end{cases}$$

$$a_{12} - a_{22} + a_{32} = -1$$

$$a_{32} - (1 - a_{32}) + a_{32} = -1$$

$$a_{32} - 1 + a_{32} + a_{32} = -1$$

$$3 \cdot a_{32} = 0 \Rightarrow a_{32} = 0$$

$$\Rightarrow a_{12} = 0$$

$$a_{22} = 1 - 0 = 1$$

$$a_{22} = 1$$

De (II), temos:

$$(-1, 0, 3) = a_{13} \cdot (1, 1, 0) + a_{23} \cdot (0, -1, 1) + a_{33} \cdot (-1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a_{13} - a_{33} = -1 \rightarrow a_{13} = -1 + a_{33} \\ a_{13} - a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{23} + a_{33} = 3 \rightarrow a_{23} = 3 - a_{33} \end{cases}$$

$$a_{13} - a_{23} + a_{33} = 0$$

$$-1 + a_{33} - (3 - a_{33}) + a_{33} = 0$$

$$-1 + a_{33} - 3 + a_{33} + a_{33} = 0$$

$$3 \cdot a_{33} = 4 \Rightarrow a_{33} = \frac{4}{3}$$

Demo:

$$a_{13} = -1 + a_{33}$$

$$a_{13} = -1 + \frac{4}{3} \Rightarrow a_{13} = \frac{1}{3}$$

$$a_{23} = 3 - a_{33}$$

$$a_{23} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow a_{23} = \frac{5}{3}$$

For firm, outputs:

$$[L]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

