

Encerramos a aula passada com o enunciado do teorema da dimensão:

TEOREMA: Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Então:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

obs.: Se V for uma soma direta de U e W , então sabe-se que $U \cap W = \{\vec{0}\}$; neste caso, $\dim(U \cap W) = 0$ [por convenção]

Assim, $V = U \oplus W$, e neste caso,

$$\dim V = \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

No que segue, mostraremos a demonstração do teorema:

DEMONSTR. Seja $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ uma base para $U \cap W$.

Logo, $\dim(U \cap W) = k$.

Como $U \cap W \subset U$ e $U \cap W \subset W$, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in U$ e também $\in W$.

Como $\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ é uma coleção de vetores L.I. em U e em W , pelo teorema do complemento da aula passada, podemos completar esta coleção de modo a formar uma base para U e também completar para formar uma base para W . Assim, sejam

$\beta_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\ell\}$
uma base para U ; e

$\beta_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$

uma base para W .

Disso, segue que

$$\dim U = k+l \quad \text{e} \quad \dim W = k+m.$$

Seja o conjunto

$$\gamma = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_{k+l}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \}$$

Afirmamos que γ é uma base para $U+W$ (provarmos isso abaixo).

Desse forma, temos que

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= \underbrace{k+l}_{\dim U} + m = \underbrace{k+l}_{\dim U} + \underbrace{k+m}_{\dim W} - \underbrace{k}_{\dim(U \cap W)} \\ &= \underbrace{\dim U + \dim W - \dim(U \cap W)} \end{aligned}$$

Isso encerra a prova desta mostra que o conjunto γ é de fato uma base para $U+W$.

Outro seja, vamos mostrar que:

$$(i) \quad [\gamma] = U+W;$$

$$(ii) \quad \gamma \text{ é L.I.}$$

(i) $[X] = U+W$: Como $[X] \subset U+W$,
basta mostrar que $U+W \subset [X]$.

Dado $\vec{x} \in U+W$, vamos mostrar que
 $\vec{x} \in [X]$. De fato, sendo $\vec{x} \in U+W$, então,
 $\exists \vec{u} \in U$ e $\vec{w} \in W$ tais que

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{w} ;$$

e como $\beta_1 = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_l \}$ e

$\beta_2 = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_m \}$ são,

respectivamente, bases de U e de W , segue que
existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta_1, \dots, \theta_l$;

$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m$, tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \theta_1 \vec{u}_{k+1} + \dots + \theta_l \vec{u}_l$$

$$\text{e } \vec{w} = a_1 \cdot \vec{w}_1 + \dots + a_k \vec{w}_k + b_1 \vec{w}_{k+1} + \dots + b_m \vec{w}_m.$$

Analisando, teremos:

$$\vec{u} = \vec{u} + \vec{w} =$$

$$= (\alpha_1 + a_1) \vec{v}_1 + \dots + (\alpha_k + a_k) \vec{v}_k + \theta_1 \vec{u}_1 + \dots + \theta_\ell \vec{u}_\ell + b_1 \vec{w}_1 + \dots + b_m \vec{w}_m \in [\gamma].$$

Portanto, vale (i).

(ii) γ é l.t.:

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta_1, \dots, \theta_\ell; t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \theta_1 \vec{v}_1 + \dots + \theta_\ell \vec{v}_\ell + t_1 \vec{w}_1 + \dots + t_m \vec{w}_m = \vec{0}.$$

Então:

$$\underbrace{\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \theta_1 \vec{v}_1 + \dots + \theta_\ell \vec{v}_\ell}_{\in U} = - \underbrace{t_1 \vec{w}_1 - \dots - t_m \vec{w}_m}_{\in W} \quad (*)$$

Logo, $-t_1 \vec{w}_1 - \dots - t_m \vec{w}_m \in U \cap W$, e como

$B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ é base para $U \cap W$, segue que existem escalares $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$-t_1 \vec{w}_1 - \dots - t_m \vec{w}_m = \delta_1 \vec{n}_1 + \delta_2 \vec{n}_2 + \dots + \delta_k \vec{n}_k.$$

$$\Rightarrow \delta_1 \vec{n}_1 + \dots + \delta_k \vec{n}_k + t_1 \vec{w}_1 + \dots + t_m \vec{w}_m = \vec{0},$$

e como $\{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ é base de W ,
 segue que; $\delta_1 = \dots = \delta_k = 0$ e

$$t_1 = \dots = t_m = 0. \rightarrow \text{nos interessa!}$$

Voltando para (*), concluímos que:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \beta_1 \vec{n}_1 + \dots + \beta_l \vec{n}_l = \vec{0},$$

$\begin{matrix} -0\vec{w}_1 & -0\vec{w}_2 & \dots \\ \dots & \dots & -0\vec{w}_m \\ \hline & & 0 \end{matrix}$

ou seja, uma comb. linear igual a zero, formada pelos vetores

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{n}_1, \dots, \vec{n}_l\} = \beta_1$, da base de V .
 e então, segue que, como são l.i. :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\beta_1 = \dots = \beta_l = 0 \rightarrow \text{nos interessam.}$$

Dito, tem-se que, sendo

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \theta_1 \vec{v}_1 + \dots + \theta_l \vec{v}_l + t_1 \vec{w}_1 + \dots + t_m \vec{w}_m = \vec{0},$$

onde $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \theta_1 = \dots = \theta_l = \dots = t_1 = \dots = t_m = 0$,

então o conjunto γ é L.F., provando (ii)

Isso encerra a demonstração.

□

EXEMPLOS:

(a) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e considere os subespaços vetoriais de V :

$$U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

Atenar ; $U \cap W$; $U + W$; $\dim U$, $\dim W$,
 $\dim (U \cap W)$ e $\dim (U + W)$.

Solução: Note que:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = \end{aligned}$$

$$= \{ x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$= [(1, 0, 0) ; (0, 1, 0)].$$

Logo, $\dim U \leq 2$; e como os vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ não. l.i., segue que

$$\boxed{\dim U = 2.}$$

Do mesmo modo :

$$W = \{ (0, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \} = \{ (0, y, 0) + (0, 0, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(0, 1, 0) ; (0, 0, 1)].$$

Dito, $\dim W \leq 2$. Como $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ não vetores l.i., segue que

$$\boxed{\dim W = 2}$$

$U \cap W$:

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot (0, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \\ &= [(0, 1, 0)] ; \end{aligned}$$

e como um único vetor não nulo sempre é l.i.; segue que $\dim(U \cap W) = 1$.

Pelo teorema da dimensão podemos determinar $\dim(U+W)$ antes de obter $U+W$.

De fato:

$$\begin{aligned} \underline{\dim(U+W)} &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= 2 + 2 - 1 = \underline{3} \end{aligned}$$

Resta, por fim, encontrar $U+W$.

Como $U = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e

$$W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Então ; $U + W = [(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 0); (0, 0, 1)]$

↑
apenas juntos
os geradores de
ambos.

↑
temos uma
repetição, então
tiramos um.

$$\Rightarrow U + W = [(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)]$$

02) Dados $W_1 = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)]$ e

$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$; subespaço
de $\mathbb{R}^3$. Determine $\dim W_1$, $\dim W_2$, $W_1 \cap W_2$,
 $W_1 + W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ e $\dim(W_1 + W_2)$.

Solução:

$\dim W_1 = ?$

Note que, como $W_1 = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)]$,
segue que $\dim W_1 \leq 2$.

Como os vetores $(1, -1, 2); (2, 1, 1)$ são l.i.

(exercício), segue que $\boxed{\dim W_1 = 2.}$

$$\dim W_2 = ?$$

Note que:

$$W_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \} =$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + 2z \} =$$

$$= \{ (x, x + 2z, z) : x, z \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (x, x, 0) + (0, 2z, z) : x, z \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, 2, 1) : x, z \in \mathbb{R} \} =$$

$$= [(1, 1, 0); (0, 2, 1)].$$

$$\Rightarrow \dim W_2 \leq 2.$$

Como $\{(1, 1, 0); (0, 2, 1)\}$ é l.i. (exercício)

segue que $\boxed{\dim W_2 = 2.}$

$$W_1 \cap W_2 = ?$$

$$W_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \}$$

$$W_1 = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)] =$$

$$= \{ a \cdot (1, -1, 2) + b \cdot (2, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (a + 2b, -a + b, 2a + b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a + 2b, y = -a + b, z = 2a + b \}$$



$$\begin{array}{rcl}
 & & -x = -\cancel{a} - 2b \\
 + \left\{ \begin{array}{l} y = -\cancel{a} + b \\ z = \cancel{2a} + b \end{array} \right. \\
 \hline
 & & -x + y + z = 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow W_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0 \}$$

Assim, podemos obter $W_1 \cap W_2$ resolvendo o sistema linear homogêneo:

$$+ \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$3z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

$$\Rightarrow x - y + \overbrace{2z}^{=0} = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$$

Assim:

$$W_1 \cap W_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ e } z = 0 \}$$

$$= \{ (x, x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \cdot (1, 1, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(1, 1, 0)],$$

e como um único vetor não nulo sempre e' l.i.,
segue que $\boxed{\dim(W_1 \cap W_2) = 1.}$

$$\dim(W_1 + W_2) = ?$$

Seo teorema da dimensão, temos:

$$\underline{\dim(W_1 + W_2)} = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$= 2 + 2 - 1 = \underline{3}$$

Por fim: $W_1 + W_2$ será dado por:

$$W_1 + W_2 = [(1, -1, 2); (2, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 2, 1)],$$

que é obviamente L.D. (pois $\dim(W_1 + W_2) = 3$)

Por exemplo, descarte o vetor $(2, 1, 1)$.

$$(2, 1, 1) = a \cdot (1, -1, 2) + b \cdot (1, 1, 0) + c \cdot (0, 2, 1)$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b + c = 1 \\ 2a + c = 1 \end{cases} \quad (\dots)$$

$$W_1 + W_2 = [(1, -1, 2); (1, 1, 0); (0, 2, 1)].$$