

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 07 de Exercícios - Transformações Lineares - Parte I
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Verifique quais aplicações abaixo são transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x - y, x + y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (\cos x, 2y, 2z)$.

(c) $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), T(X) = P^{-1}XP$, onde P é uma matriz invertível.

(d) $D : C^2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), D(f) = f' - 2f''$.

2. Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.
3. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - 3y + z, x - z)$ é uma transformação linear.
4. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ não é uma transformação linear.
5. (Sel. Mestrado UFSM 2015/2) Verifique que $T : P_2 \rightarrow P_2$ definido por

$$T(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} - f(t)$$

é um operador linear.

6. (Sel. Mestrado UFSM 2018/1) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x + x^2), \quad \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R}).$$

Prove que T é uma transformação linear.

7. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja B um elemento de V e considere a aplicação $\varphi_B : V \rightarrow V$ dada por

$$\varphi_B(A) = A \cdot B - B \cdot A.$$

Mostre que φ_B é uma transformação linear.

8. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3, 2)$.
9. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 2, 1)$ e $T(3, 4) = (6, 5, 4)$.
10. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (2, 3)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$.
11. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Obtenha todas as transformações lineares $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $L(u) = 3u$, $L(v) = 3v$ e $L(w) = 3w$, onde $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$.

12. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.

13. Obtenha a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$L(1, 1, 1) = (4, 12), \quad L(1, 1, 0) = (0, 4) \quad \text{e} \quad L(1, 0, 0) = (1, 3).$$

14. Seja L o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $L(1, 2) = (2, 1)$ e $L(0, -1) = (1, 4)$.

(a) Determine $L(2, -2)$.

(b) Determine $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(x, y) = (1, 3)$.

15. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e C o conjunto dos vetores de V que são deixados fixos por T , ou seja,

$$C = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{v}\}.$$

Mostre que C é um subespaço vetorial de V .

16. Sejam S e T os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (0, x)$ e $T(x, y) = (x, 0)$. Mostre que $TS = 0$, mas que $ST \neq 0$. Mostre também que $T^2 = T$.

17. Sendo F, G e $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$, determinar $F + H$, $F \circ G$, $G \circ (H + F)$, $G \circ F$ e $H \circ F$.

18. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $S : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_3$ transformações lineares dadas, respectivamente, por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ z & x + y - z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12}t - a_{21}t^2 - a_{22}t^3.$$

Determine $S \circ T$.

19. Sejam $T_1, T_2 : U \rightarrow V$ e $T_3 : V \rightarrow W$ transformações lineares. Mostre que

$$T_3 \circ (T_1 + T_2) = T_3 \circ T_1 + T_3 \circ T_2.$$