Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 05 de Exercícios - Base e dimensão
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. (a) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LI. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

   (b) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LD. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

2. Ache uma base e a dimensão do subespaço $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$.

3. Obtenha uma base e a dimensão do subespaço W do $\mathbb{R}^3$ dado por

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y\}$

4. Considere o subespaço $W = \{p(x) \in P_2 : x \cdot p'(x) = p(x)\}$ de P_2. Determine uma base para W e $\dim W$.

5. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:
   $S = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)]$; $T = [(0, 1, -1); (1, 2, 1)]$; $U = \{(x, y, z) : x+y = 4x-z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) : 3x - y - z = 0\}$. Determine as dimensões de $S, T, U, V, S + T$ e $S \cap T$.

6. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

   $$U = [(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0)] \text{ e } V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\}.$$

   Determine $\dim\,(U \cap V)$ e $\dim\,(U + V)$.

7. Sejam U e W subespaços de um espaço de dimensão n. Suponha que $\dim U > \frac{n}{2}$ e que $\dim W > \frac{n}{2}$. Prove que $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$.

8. Qual é a dimensão do espaço das matrizes 2×2 diagonais?

9. Sejam W_1 e W_2 subespaços de dimensão 2 e 3, respectivamente, do $\mathbb{R}^4$.

   (a) Prove que a dimensão de $W_1 \cap W_2$ é pelo menos 1.

   (b) O que acontece se a dimensão de $W_1 \cap W_2$ é 2? Ela pode ser 3?

10. Sejam S, T subespaços do $\mathbb{R}^4$ dados por

    $$S = [(1, -1, 2, 3); (1, 1, 2, 0); (3, -1, 6, -6)]$$

    e

    $$T = [(0, -2, 0, -3); (1, 0, 1, 0)].$$

    Determine as dimensões de S, T e $S \cap T$.