

NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

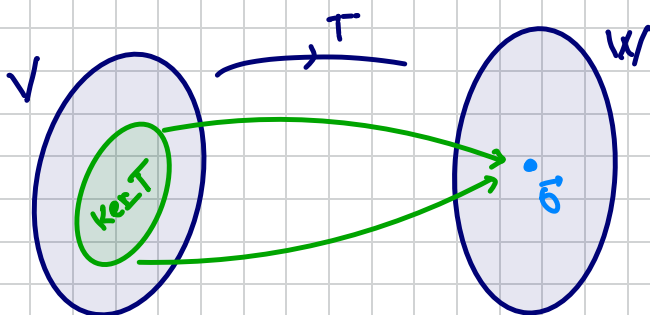
Def.: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear.

Definimos o núcleo de T por:

$$\text{Ker}(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W \}.$$

Outra seja, o núcleo de T é o conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in V$ que são enviados ao vetor nulo $\vec{0}_W \in W$.

Obs: O núcleo de $T: V \rightarrow W$ é denotado por $\text{Ker}(T)$ ou $N(T)$. O símbolo "ker" vem do alemão, "KERNEl", que significa núcleo.



Obviamente, $\text{Ker } T \subset V$, pela própria definição de núcleo.

ex. Dada $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$;

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y)$$

Determine $\text{Ker}(T)$.

solução:

$$\text{Ker}(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0) \} =$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y - z, 2x - y) = (0, 0) \}$$

Outra seja, $\text{Ker}(T)$ corresponde à solução do sistema linear:

$$\begin{array}{l} + \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \rightarrow \quad y = 2x$$

$$3x - z = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 3x}$$

Outra seja;

$$\underline{\text{Ker}(T)} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x \}$$

$$= \{ (x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \cdot (1, 2, 3) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \underline{\underline{\{ (1, 2, 3) \}}}$$

Repare neste exemplo que o núcleo de T resultou em um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$.

E isso não é por acaso, é uma propriedade, conforme o seguinte teorema:

TEOREMA: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V .

DEMONSTR: Dado $T: V \rightarrow W$ transf. linear e sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V$. Vamos mostrar que:

$$(i) \quad \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(T) ;$$

$$(ii) \quad \alpha \cdot \vec{u} \in \text{Ker}(T) ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

De fato, basta notar que:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \underbrace{T(\vec{u})}_{=\vec{0}} + \underbrace{T(\vec{v})}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

T é linear

pois $\vec{u}, \vec{v} \in \ker T$

$\Rightarrow T(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$. Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in \ker(T)$,
provando o item (i)

Do mesmo modo,

$$\underbrace{T(\alpha \vec{u})}_{\text{pois } T \text{ é linear}} = \alpha \cdot \underbrace{T(\vec{u})}_{=\vec{0}, \text{ pois } \vec{u} \in \ker(T)} = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Logo, $T(\alpha \vec{u}) = \vec{0}$, i.e., $\alpha \cdot \vec{u} \in \ker(T)$,
provando (ii).

De (i) e (ii) segue que $\ker(T)$ é um
subespaço vetorial de V .

□

Vejam os alguns exemplos.

02) Dada $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear definida por

$$T(x, y) = (x + y, x - 2y, x)$$

Determine $\text{Ker}(T)$, $\dim(\text{Ker } T)$ e uma base para $\text{Ker}(T)$.

Solução:

$$\text{Ker } T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0, 0)\}.$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, x - 2y, x) = (0, 0, 0)\};$$

ou seja, $\text{Ker } T$ é a solução do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y = 0}$$

Logo, $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}.$

Disso, $\dim \text{Ker}(T) = 0$; e, neste caso específico, não existe uma base para $\text{Ker } T$.

02) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y + z)$. Determine $\ker(T)$, $\dim(\ker(T))$ e uma base para $\ker(T)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y + 2z, x + y + z) = (0, 0)\},\end{aligned}$$

ou seja, $\ker T$ é a solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{array}{l} + \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \\ \hline 2x + 3z = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}z}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow y = -x - z$$

$$y = -\left(-\frac{3}{2}z\right) - z$$

$$y = \frac{3}{2}z - \frac{2z}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} z.}$$

Assim, obtemos:

$$\text{Ker}(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -\frac{3}{2}z \text{ e } y = \frac{1}{2}z \}$$

$$= \{ (-\frac{3}{2}z, \frac{1}{2}z, z) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ z(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \frac{z}{2}(-3, 1, 2) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(-3, 1, 2)],$$

$$\Rightarrow \text{Ker } T = [(-3, 1, 2)], \text{ ou seja; o}$$

núcleo de T é um subespaço vetorial gerado por um único vetor não-nulo. É como um

único vetor não nulo é sempre L.I.; segue que

o conjunto $\{(-3, 1, 2)\}$ é uma base para o

núcleo, donde segue que $\dim(\text{Ker } T) = 1$.

03) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x - z, x + 2y + z, x + y)$
uma transformação linear. Determine
 $\ker(T)$, $\dim(\ker T)$ e uma base para $\ker(T)$.

Solução:

$$\ker(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - z, x + 2y + z, x + y) = (0, 0, 0) \},$$

ou seja, $\ker(T)$ é a solução do sist. homogêneo:

$$\begin{cases} x - z = 0 \longrightarrow z = x \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \longrightarrow y = -x \end{cases}$$

$$x + 2y + z = 0$$

$$x + 2 \cdot (-x) + x = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{OK!}$$

Então,

$$\ker T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x \text{ e } y = -x \},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\ker T &= \{ (x, -x, x) : x \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ x \cdot (1, -1, 1) : x \in \mathbb{R} \} \\ &= [(1, -1, 1)].\end{aligned}$$

$\Rightarrow \ker T = [(1, -1, 1)]$. Deixa; o conjunto $\{ (1, -1, 1) \}$ ser uma base para $\ker T$; e logo, $\dim \ker T = 1$.

04) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y - z, 2x + y + z)$

Adem $\ker T$, $\dim \ker T$ e uma base para $\dim \ker T$.

Solução:

$$\ker T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2y - z, x - y - z, 2x + y + z) = (0, 0, 0) \},$$

ou seja, $\ker T$ será a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \times (-1)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \\ -2x - y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$-3z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \end{array} \right. \rightarrow x = y$$

$$y + 2y = 0 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0$$

Conclusão: $\ker T = \{ (0, 0, 0) \}$

Neste caso, $\dim \ker T = 0$, e então, neste caso, não tem uma base.

05) $T: P_2 \rightarrow P_1$, uma transformação linear do espaço de polinômios de grau ≤ 2 para o espaço de polinômios de grau ≤ 1 , dada por:

$$T(p(x)) = p'(x)$$

Determine $\ker(T)$.

Solução:

$$\text{Ker}(T) = \{ p(x) \in P_2 : T(p(x)) = 0 \in P_1 \}$$

$$= \{ p(x) \in P_2 : p'(x) = 0 \}$$

$$= \{ p(x) \in P_2 : p(x) = k \in \mathbb{R} \};$$

ou seja, $\text{Ker}(T)$ é o conjunto de todos os polinômios constantes em P_1 .

06) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x + y + 2z)$

Determine $\text{Ker } T$, $\dim \text{Ker } T$ e uma base para $\text{Ker } T$.

Solução:

$$\text{Ker } T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0) \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2y + z, 3x + y + 2z) = (0, 0) \},$$

ou seja, $\text{Ker } T$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{x = 2y - z}$$

$$3(2y - z) + y + 2z = 0$$

$$6y - 3z + y + 2z = 0$$

$$7y - z = 0$$

$$\boxed{z = 7y}$$

$$\Rightarrow x = 2y - z = 2y - 7y = \boxed{x = -5y}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{ker } T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -5y \text{ e } z = 7y\}$$

$$= \{(-5y, y, 7y)\}$$

$$= \{y \cdot (-5, 1, 7)\} = \underline{\underline{[(-5, 1, 7)]}}$$

$$\Rightarrow \dim \text{ker } T = 1 \quad \text{e o vev. } \{(-5, 1, 7)\}$$

será uma base para $\text{ker } T$.

ex) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(x, y, z) = x + 2y - z.$$

$\text{ker } T = ?$ $\dim(\text{ker } T) = ?$ base para $\text{ker } T$?

solução:

$$\text{ker } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\};$$

ou seja, $\text{Ker } T$ é a solução da eq.:

$$x + 2y - z = 0$$

$$z = x + 2y$$

Sobretudo, obtenhamos:

$$\underline{\text{Ker } T} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + 2y \}$$

$$= \{ (x, y, x + 2y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x, 0, x) + (0, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, 2) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \underline{[(1, 0, 1), (0, 1, 2)]}$$

Como o conj. $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ é l.i.

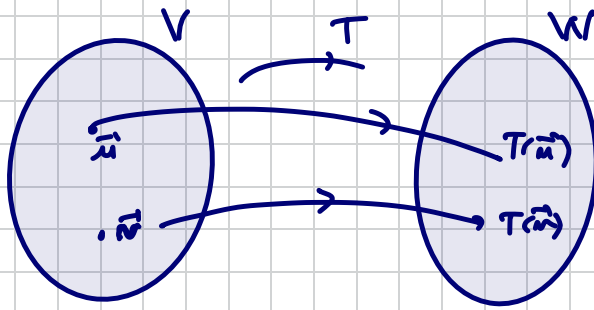
(exercício), segue que este conj. é uma base para $\text{Ker } T$ e, portanto, $\dim \text{Ker } T = 2$.

Def.: Dizemos que uma transformação linear

$T: V \rightarrow W$ é injetiva se, e somente se,

$$T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

ou ainda: se $\vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$



PROPOSIÇÃO Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é injetiva se, e somente se, $\ker T = \{\vec{0}\}$.

DEMONSTRA. Suponha que $T: V \rightarrow W$ seja injetiva. Vamos mostrar que $\ker T = \{\vec{0}\}$.

Sei absurdo, suponha que $\ker T \neq \{\vec{0}\}$.

Então, $\exists \vec{u} \in \ker T$; $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{0}$.

Mas, $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Então, temos

$$\vec{u} \neq \vec{0}, \text{ mas } T(\vec{u}) = T(\vec{0}) = \vec{0},$$

ou seja, T não é injetiva, um absurdo, pois por hipótese, suponhamos T injetiva.

Portanto, segue que $\ker T = \{\vec{0}\}$.

Reciprocamente, suponha que $\ker T = \{\vec{0}\}$.

Vamos mostrar que T é injetiva.

Sei absurdo, se T não for injetiva. Então, existem $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tais que

$$\vec{u} \neq \vec{v}, \text{ mas } T(\vec{u}) = T(\vec{v})$$

Ou seja, $T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}$, sendo $\vec{u} \neq \vec{v}$.

Como T é linear, temos:

$$T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}.$$

Logo, $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker } T$; e como $\text{Ker } T = \{\vec{0}\}$, segue que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, i.e., $\vec{u} = \vec{v}$, mas é um absurdo, pois $\vec{u} \neq \vec{v}$.

Logo, T é injetiva. □

EX. Os exemplos 01 e 04 feitos anteriormente são de transformações lineares injetivas, pois $\text{Ker } T = \{\vec{0}\}$ nestes exemplos. Já os demais exemplos, as transformações são não injetivas.
