

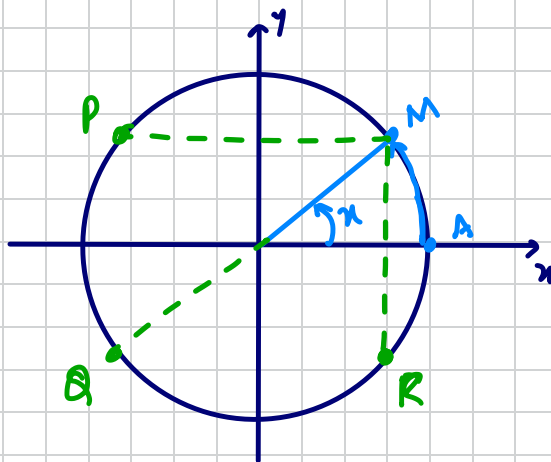
FUNÇÕES TRANSCENDENTES

AVIA 08 - 26/11/25

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Dado um arco $x = \widehat{AM}$, $x \in]-\pi, \pi[$. Os seguintes arcos são SIMÉTRICOS a x , nos demais quadrantes:

Os arcos $\widehat{AP}$,
 $\widehat{AQ}$ e $\widehat{AR}$

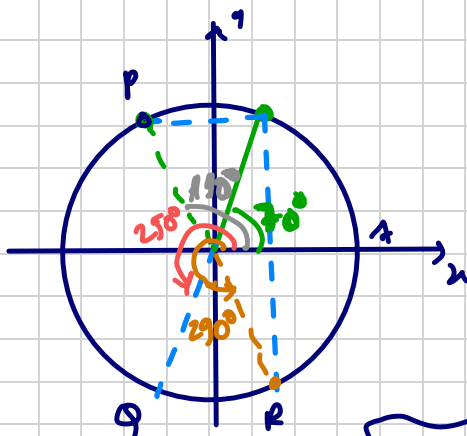


Os arcos simétricos a um dado arco $x \in]-\pi, \pi[$, as suas projeções nos eixos coordenados são iguais em módulo (podem diferir no sinal, dependendo do quadrante e do número trigonométrico a ele associado).

De maneira geral, sendo x um arco do 1.º q., os seus simétricos nos demais quadrantes serão:

- 2.º q.: $180^\circ - x$
- 3.º q.: $180^\circ + x$
- 4.º q.: $360^\circ - x$.

Ex.: Dado o arco $x = 70^\circ \in 1.º \text{q.}$; quais são os seus arcos simétricos nos demais quadrantes?



$$\widehat{AP} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\widehat{AQ} = 180^\circ + 70^\circ = 250^\circ$$

$$\begin{aligned}\widehat{AR} &= 360^\circ - 70^\circ \\ &= 290^\circ\end{aligned}$$

Olhar a simetria é importante para podermos efetuar a redução ao 1.º quadrante.

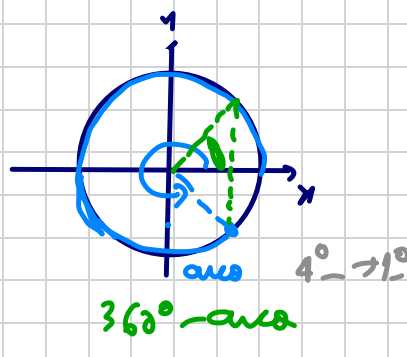
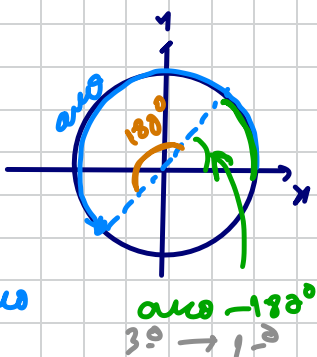
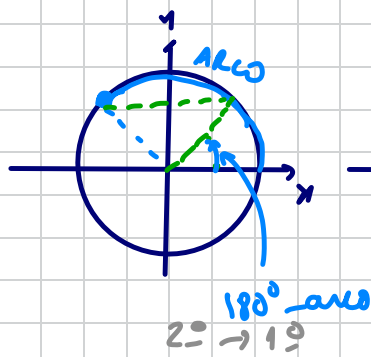
Def.: Reduzir um arco (associado a um número trigonométrico) ao 1.º quadrante significa determinar o seu valor em função do seu representante no 1.º quadrante, observando o sinal desse número trigonométrico no quadrante de origem. Assim dado um arco do 1.º q :

tem-se:

REDUÇÃO DO 2.º q $\Rightarrow$ 1.º q : $180^\circ - \text{arco}$.

REDUÇÃO DO 3.º q $\Rightarrow$ 1.º q : $\text{arco} - 180^\circ$

REDUÇÃO DO 4.º q $\Rightarrow$ 1.º q : $360^\circ - \text{arco}$.



Vamos ver em conjunto com os números trigonométricos.

Dado $x \in]-\pi; \pi[$; então: (exemplos):

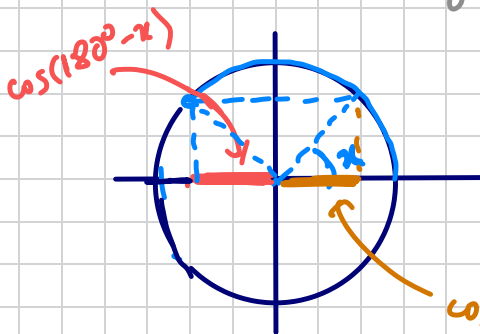
$$\bullet \sin(\underbrace{180^\circ - x}_{2.º \text{ q}}) = + \sin[180^\circ - (\overbrace{180^\circ - x}^{\text{arco}})] =$$

↑
pois no 2.º q.
o seno é
positivo

$$= \sin(\cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ} + x) = \sin x.$$

$$\bullet \cos(\underbrace{180^\circ - x}_{\in 2.º \text{ q}}) = - \cos(\cancel{180^\circ} - (\cancel{180^\circ} - x)) = -\cos x$$

↑
pois no 2.º q.
o cosseno é
negativo.



NOTE, GEOMETRICAMENTE,
QUE UM DELES É
"MENOS O OUTRO".

Ex.: $\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\in 2^{\text{oa}}$ $\uparrow$ sinal do quadrante de origem (2^{oa})

$\cos(\overbrace{180^\circ + x}^{\text{ano}}) = -\cos(\overbrace{(180^\circ + x) - 180^\circ}^{\text{ano}}) = -\cos x.$

$\in 3^{\text{oa}}$

$\uparrow$ pois no 3^{oa} o cosseno é negativo.



$\tan(\overbrace{180^\circ + x}^{\text{ano}}) = +\tan(\overbrace{(180^\circ + x) - 180^\circ}^{\text{ano}}) = \tan x.$

$\in 3^{\text{oa}}$

$\uparrow$ pois no 3^{oa} a tangente é positiva.



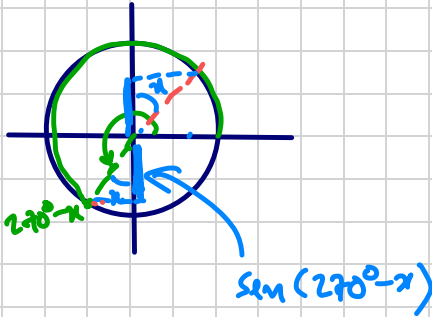
$\sin(\overbrace{270^\circ - x}^{\text{ano}}) = -\sin(\overbrace{(270^\circ - x) - 180^\circ}^{\text{ano}}) =$

$\in 3^{\text{oa}}$

$\uparrow$ pois no 3^{oa} o seno é negativo

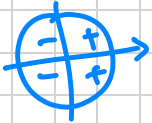


$$= - \underbrace{\sin(90^\circ - x)}_{\substack{\text{ARCO} \\ \text{COMPLEMENTAR}}} = - \cos x$$



$$\bullet \sec(\overbrace{360^\circ - x}^{\text{arco.}}) = + \sec(\cancel{360^\circ} - (\cancel{360^\circ - x}) =$$

4.º q.



pois no 4.º q.
a secante é
positiva

$$= + \sec x$$

$$\bullet \csc(\overbrace{270^\circ + x}^{\text{arco.}}) = - \csc(\cancel{360^\circ} - (\cancel{270^\circ + x}) =$$

4.º q.



pois no 4.º q.
a cosecante é
negativa.

$$= -\csc(90^\circ - x) = -\sec x.$$

↑
relação de arco complementar.

Ex: De uma prova do semestre passado:

Questão 04. Sendo x um arco do primeiro quadrante, mostre que

$$\frac{\cot(270^\circ + x) - \sin(180^\circ + x)}{\csc(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x)} = \cot x - \csc x.$$

Solução: Note que:

$$\bullet \cot(\underbrace{270^\circ + x}_{4.90^\circ}) = -\cot(360^\circ - (270^\circ + x)) =$$

↑
na 4.ª q a cotangente é negativa.

$$= -\cot(90^\circ - x) = -\tan x.$$

$$\bullet \sin(\underbrace{180^\circ + x}_{3.90^\circ}) = -\sin((180^\circ + x) - 180^\circ) = -\sin x.$$

↑
na 3.ª q o seno é negativo.



$$\bullet \csc(\underbrace{90^\circ + x}_{2^\circ q}) = + \csc(180^\circ - (90^\circ + x)) =$$

↑
 não há 2º q
 a consequente
 é positiva.

$$= \csc(90^\circ - x) = \sec x.$$

↖ *arcos complementares*

obs:

$$\csc(90^\circ - x) = \frac{1}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

$$\bullet \cos(\underbrace{180^\circ - x}_{2^\circ q}) = - \cos(180^\circ - (180^\circ - x)) = - \cos x.$$

↑
 não é cosseno
 e é negativo no 2º q.



Assim, obtenemos:

$$\frac{\cot(270^\circ + x) - \sec(180^\circ + x)}{\csc(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x)} = \frac{-\tan x - (-\sec x)}{\sec x + (-\cos x)} =$$

$$= \frac{-\tan x + \sec x}{\sec x - \cos x} = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x} + \sec x}{\frac{1}{\cos x} - \cos x} =$$

$$= \frac{\frac{-\sin x + \sin x \cdot \cos x}{\cos x}}{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}} =$$

$$= \frac{-\sin x (1 - \cos x)}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{-\sin x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{-\cancel{\sin x} (1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= \frac{-1 + \cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$= -\csc x + \cot x$$



Outros exemplos:

01) Calcule $\tan 210^\circ$.

$$\tan \underbrace{210^\circ}_{2^{\text{eq.}}} = + \tan(210^\circ - 180^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

↑
no 3º q
tangente é
positiva

02) Calcule $\csc 3000^\circ$.

solução:

$$\begin{array}{r|l} 3000^\circ & 360 \\ -2880^\circ & 8 \text{ voltas} \\ \hline 120^\circ & \end{array}$$

$$\csc 3000^\circ = \csc \underbrace{120^\circ}_{2^{\text{eq.}}} = + \csc(180^\circ - 120^\circ) =$$

↑
no 2º q
cosecante é
positiva

$$= \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

03) Calcule o valor de $\tan 3540^\circ$.

Solução:

$$\begin{array}{r} 3540^\circ \quad | \quad 360 \\ \underline{3240^\circ} \quad \text{7 voltas} \\ 300^\circ \end{array}$$

Então:

$$\tan 3540^\circ = \tan \underbrace{300^\circ}_{4^{\text{º}}\text{Q}} = - \tan (360^\circ - 300^\circ)$$

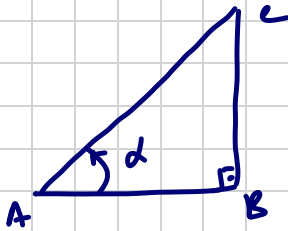


↑
a tangente é
negativa no
4º Q.

$$= - \tan 60^\circ = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$



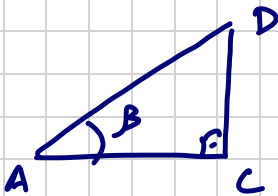
FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

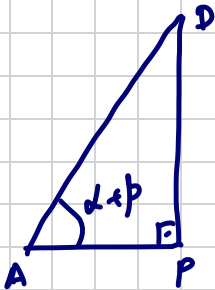
Σ, obteniendo a $\triangle ACD$, tenemos:



$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

Obteniendo a $\triangle APD$, tenemos:



$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PT} + \overline{TD}}{\overline{AD}} =$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{TD}}{\overline{AD}} =$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{TD}}{\overline{AD}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{TD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DC}} = \\
 &= \underbrace{\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}_{\text{sen } \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}}_{\text{cos } \beta} + \underbrace{\frac{\overline{TD}}{\overline{DC}}}_{\text{cos } \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}}_{\text{sen } \beta} \\
 &= \underline{\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha}
 \end{aligned}$$

ou seja, mostramos que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$$

FÓRMULA DO SENO DA SOMA
DE DOIS ARCOS

Exemplo 0:

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{sen } 90^\circ} &= \text{sen}(30^\circ + 60^\circ) = \\
 &= \text{sen } 30^\circ \cdot \text{cos } 60^\circ + \text{sen } 60^\circ \cdot \text{cos } 30^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

Exemplo 1:

$$\sin 75^\circ = ?$$

$$\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

SENDA DIFERENÇA:

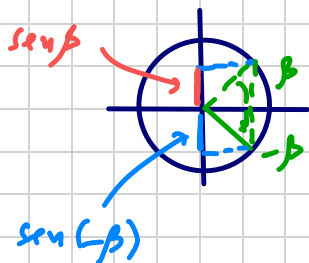
$$\sin(\alpha - \beta) = ?$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos \alpha \quad \text{=}$$



$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$



$$\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$$

$$\{ = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + (-\text{sen}\beta) \cdot \cos\alpha$$

$$= \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cos\alpha.$$

conclusão:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cos\alpha$$

FÓRMULA DO SENO DA DIFERENÇA
DE DOIS ÂNGULOS.

Ex.! $\text{sen } 15^\circ = ?$

$$\begin{aligned} \text{sen } 15^\circ &= \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS:

$$\cos(\alpha + \beta) = ?$$

Basta notar que: (usando relação complementar)

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) =$$

$$= \sin(90^\circ - \alpha - \beta) =$$

$$= \underbrace{\sin(90^\circ - \alpha)}_{\cos \alpha} \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \underbrace{\cos(90^\circ - \alpha)}_{\sin \alpha}$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

conclusão:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

FÓRMULA DO COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS.

Ex: $\cos 105^\circ = ?$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos (60^\circ + 45^\circ) = \\&= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \quad //\end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= -\cos (180^\circ - 105^\circ) = -\cos 75^\circ \\&\quad \text{2.º q} \\&= -\cos (30^\circ + 45^\circ) = -\left[\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \right] \\&= -\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right] \\&= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \quad //\end{aligned}$$

COSSENO DA DIFERENÇA ENTRE DOIS ARCOS:

$$\cos(\alpha - \beta) = ?$$

Usaremos relação de arco complementar:

$$\underline{\cos(\alpha - \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) =}$$

$$= \sin((90^\circ - \alpha) + \beta) =$$

$$= \underbrace{\sin(90^\circ - \alpha)}_{\text{"cos } \alpha} \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \underbrace{\cos(90^\circ - \alpha)}_{\text{"sen } \alpha} =$$

$$= \underline{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Conclusão:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

FÓRMULA DO COSSENO DA DIFERENÇA ENTRE
DOIS ARCOS.