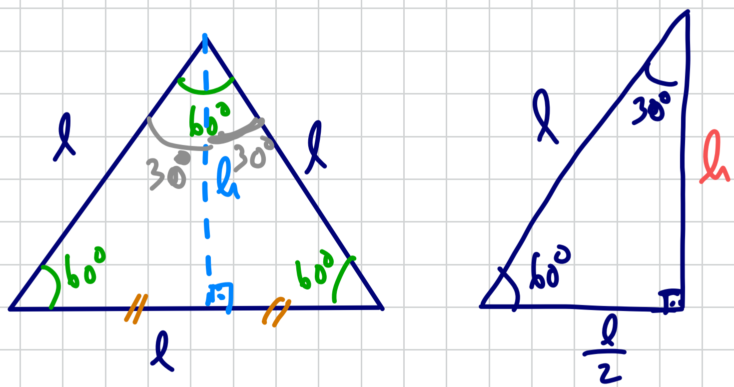
FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

12/11/25 – AULA 7

ARCOS NOTÁVEIS:

São os arcos de $\frac{\pi}{6}$ rad (30°); $\frac{\pi}{4}$ rad (45°) e $\frac{\pi}{3}$ rad (60°). Para estes arcos conseguimos determinar os valores trigonométricos associados a eles.

Para 30° e 60° consideramos um triângulo equilátero de lado l.

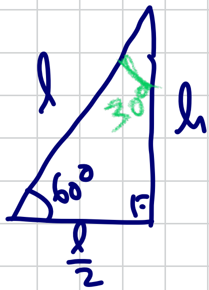


Assim, tem-se:

- $\underline{\text{sen}\,30°} = \dfrac{\frac{\cancel{l}}{2}}{\cancel{l}} = \underline{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \underline{\cos 60°} = \text{sen}(90° - 60°) = \text{sen}\,30° = \underline{\frac{1}{2}}$

• $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{h}{l}$ ← precisamos obter uma relação entre h e l. (usaremos o T. de Pitágoras)



$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{h} = \sqrt{\frac{3\cancel{l^2}}{4}} = \underline{\frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

Assim, obtemos:

• $\underline{\operatorname{sen} 60^\circ} = \dfrac{h}{l} = \dfrac{\frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{l}} = \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Disso, tem-se, pela relação complementar, que:

$$\underline{\cos 30^\circ} = \operatorname{sen}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Vamos calcular tan 30° e tan 60°.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sen}\, 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

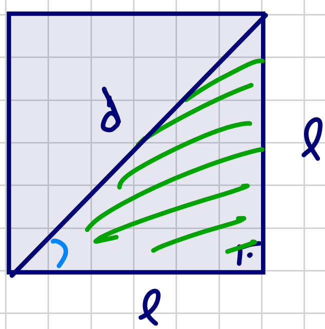
Ou :

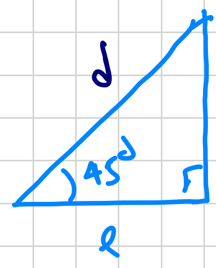
$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{l}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sen}\, 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Para o arco de 45° consideremos um quadrado de lado l.



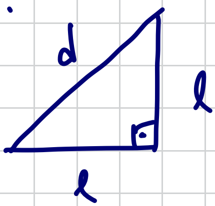


$\Rightarrow \tan 45^\circ = 1.$

$\text{sen}\, 45^\circ = \dfrac{l}{d}$; $\cos 45^\circ = \dfrac{l}{d}$

assumem mesmo valor em 45°.

Pelo T. de Pitágoras encontramos uma relação entre l e d:



$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2 . l^2$$
$$d = \sqrt{2l^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{d = l\sqrt{2}}$$

Assim, obtemos:

$$\text{sen}\, 45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \text{sen}(90^\circ - 45^\circ) = \text{sen}\, 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Demais números trigonométricos:

- $\sec 30^\circ = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

- $\sec 60^\circ = \dfrac{1}{\cos 60^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

- $\sec 45^\circ = \dfrac{1}{\cos 45^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Outras relações complementares:

Já sabemos que, dado $x \in 1.°q$, tem-se:

$\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos x$ e $\cos(90^\circ - x) = \operatorname{sen} x$.

Agora, consideremos os demais números trigonométricos:

- $\sec(90^\circ - x) = \dfrac{1}{\cos(90^\circ - x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$.

- $\csc(90^\circ - x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(90^\circ - x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

- $\tan(90^\circ - x) = \dfrac{\operatorname{sen}(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\tan x} =$

$= \cot x.$

- $\cot(90^\circ - x) = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - x)} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)}} =$

$= \dfrac{\cos(90^\circ - x)}{\operatorname{sen}(90^\circ - x)} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$

Isto posto, temos:

- $\csc 30^\circ = \sec(90^\circ - 30^\circ) = \sec 60^\circ = 2$

Ou: $\csc 30^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

- $\csc 60^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

- $\csc 45^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

- $\cot 60^\circ = \tan(90^\circ - 60^\circ) = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

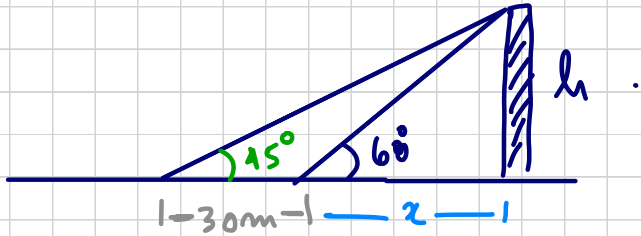
  ou: $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\tan 60^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

- $\cot 30^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

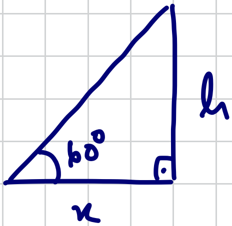
- $\cot 45^\circ = \tan 45^\circ = 1$.

EXERCÍCIO:

Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30m, passa a ver o edifício sob um ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

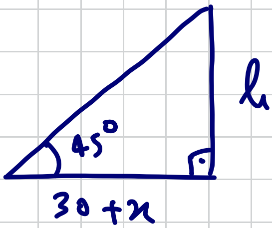


$h = ?$



$$\tan 60° = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow \boxed{h = x\sqrt{3}} \quad (*)$$



$$\tan 45° = \frac{h}{30+x}$$

$$1 = \frac{h}{30+x}$$

$$\boxed{h = 30 + x} \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, temos:

$$h = h$$

$$x\sqrt{3} = 30 + x$$

$$x\sqrt{3} - x = 30$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = 30$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{30 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$$

$x = 15(\sqrt{3}+1)\ m$

Por fim:

$h = x\sqrt{3} = 15(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}\ m$

$h = 15\cdot(3+\sqrt{3})\ m$

REVISÃO / RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS L1:

EXTRA:

2) Sabendo que $\log_a b = m$, calcule $\log_b a$, com a e b positivos e diferentes de 1.

Resp.: $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{m}$

$\log_a b = m$. $\log_b a = ?$; $a, b > 0$; $a, b \neq 1$.

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{m}$$

1) Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcular :

a) $\log_2 3$; b) $\log_3 8$; c) $\log_5 36$; d) $\log_{16} \sqrt{128}$;

e) $\log_9 \dfrac{\sqrt[3]{20}}{81}$.

Resp.:

a) 1,585 ;

b) 1,893 ;

[illegible] ;

d) 0,875 ;

e) -2,254

(a) $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{0{,}477}{0{,}301}$

$= \dfrac{477}{301} \cong 1{,}585$

(c) $\log_5 36 = \dfrac{\log 36}{\log 5} = \dfrac{\log 6^2}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} =$

$= \dfrac{2 . \log 6}{\log 10 - \log 2} = \dfrac{2 . \log (2 . 3)}{1 - \log 2} =$

$= \dfrac{2 . (\log 2 + \log 3)}{1 - \log 2} =$

$= \dfrac{2 . (0{,}301 + 0{,}477)}{1 - 0{,}301} = \dfrac{2 . (0{,}778)}{0{,}699}$

$= \dfrac{1{,}556}{0{,}699} \cong 2{,}226$ ✓

L1 14 ||

14. (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

a) β. b) 24. ~~c)~~ 10^4. d) $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$. e) $\sqrt{6}$.

$\log \alpha = 6 \longrightarrow \alpha = 10^6$

$\log \beta = 4 \longrightarrow \beta = 10^4$

Achar: $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$. Assim:

$$\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta} = \sqrt[4]{(10^{\cancel{6}})^2 \cdot 10^{\cancel{4}}} = 10 \cdot \sqrt[4]{10^{12}}$$

$$= 10 \cdot 10^{\frac{12}{4}} = 10 \cdot 10^3 = 10^4$$

6. (IME - RJ) Dada a função $f(x) = \dfrac{156^x + 156^{-x}}{2}$, demonstre que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

solução:

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{156^{x+y} + 156^{-(x+y)}}{2} + \frac{156^{x-y} + 156^{-(x-y)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[156^x \cdot 156^y + 156^{-x} \cdot 156^{-y} + 156^x \cdot 156^{-y} + 156^{-x} \cdot 156^y \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[156^x \cdot \left(156^y + 156^{-y} \right) + 156^{-x} \left(156^y + 156^{-y} \right) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{\left(156^y + 156^{-y}\right)}{2}}_{f(y)} \cdot \underbrace{\frac{\left[156^x + 156^{-x}\right]}{2}}_{f(x)} \times 2 =$$

$$= 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$$

15. (PUC-SP) Uma calculadora eletrônica possui as teclas das quatro operações fundamentais e as teclas 10^x, $\log_{10}$ e ln. Como obter o valor de e usando as funções da calculadora?

$+ \quad - \quad \times \quad \div \qquad 10^x \; ; \; \log_{10} \; ; \; \ln.$

Como determinar o valor de e:

Note que:

1º: $\dfrac{1}{\ln 10} = \dfrac{1}{\dfrac{\log 10}{\log e}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log e}} = \log e$

2º: $10^{\log e} = 10^{\log_{10} e} = e$

13. Se $\log_b a = \log_a b$, que relação existe entre a e b?

$\log_a b = \log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\Rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_a b} \Leftrightarrow (\log_a b)^2 = 1.$

$\log_a b = 1$ ou $\log_a b = -1$.

def. $\iff$ $a^1 = b$ ou $a^{-1} = b$

conclusão: $a = b$ ou $\frac{1}{a} = b$.

---

2. Resolva as inequações:

(a) $(\frac{1}{3})^x \leq \frac{1}{27}$ (b) $4^{|x+3|} \leq \sqrt{2}$ (c) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$ (d) $\sqrt[3]{7^{|x-5|}} > 343$

(d) $\sqrt[3]{7^{|x-5|}} > 343$.

$$7^{\frac{|x-5|}{3}} > 343 = 7^3$$

$$\underbrace{7}_{b=7>1}^{\frac{|x-5|}{3}} > 7^3 \implies \frac{|x-5|}{3} > 3$$

$|x-5| > 9$.

Obs.: Lembre-se de uma propriedade dos módulos:

$$|w| > a \iff w > a \text{ ou } w < -a.$$

Assim:

$$|x-5| > 9 \iff x-5 > 9 \text{ ou } x-5 < -9$$

$$\iff x > 9+5 \text{ ou } x < -9+5$$

$$x > 14 \text{ ou } x < -4.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 14 \text{ ou } x < -4\}$$

(c) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$:

$$(3^x)^2 - 3^x \cdot 3^1 > 3^x - 3$$

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 3^x + 3 > 0$$

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$$

Escreva $3^x = w$. Assim:

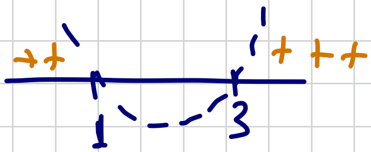
$$w^2 - 4w + 3 > 0.$$

onde $w^2 - 4w + 3 = 0$?

$$w = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$w = \frac{4+2}{2} \quad \text{ou} \quad w = \frac{4-2}{2}$$

$$w = 3 \quad \text{ou} \quad w = 1.$$



conclusão parcial.

$$w < 1 \quad \text{ou} \quad w > 3$$

Como: $3^x = w$; então, teremos:

$$3^x = w < 1 \quad \text{ou} \quad 3^x = w > 3$$

$$3^x < 1 \quad \text{ou} \quad 3^x > 3$$

$$3^x < 3^0 \quad \text{ou} \quad 3^x > 3^1$$

$\Rightarrow x < 0$ ou $x > 1$.

Solução: $\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.