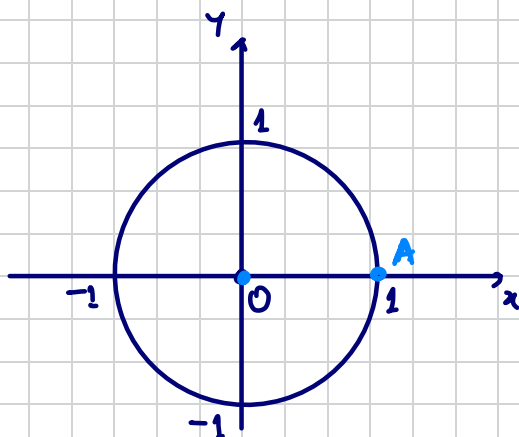


FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

05/11/25 - AULA 06

ciclo trigonométrico:

Def.: Chamamos ciclo trigonométrico a circunferência de raio unitário centrada no centro de um plano cartesiano.



O: origem dos eixos.

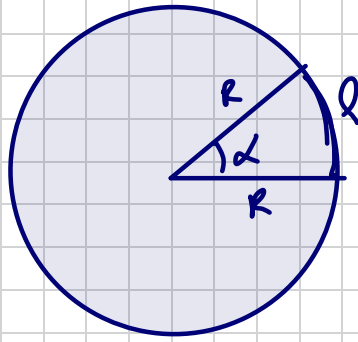
A: origem dos arcos.

E por que tomamos o raio $R=1$?

Como a medida de um ângulo α numa circunferência, expressa em radianos, é dada

por $\alpha = \frac{l}{R}$ (i.e., a razão entre

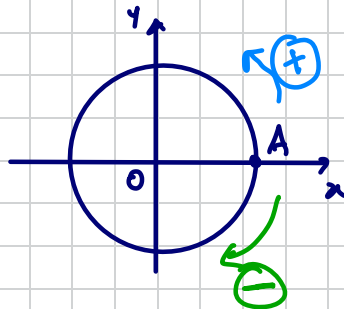
a medida do comprimento do arco e do raio subtendido.



Quando $r=1$,
então, tem-se
 $\alpha = \frac{l}{1} = l$.

Ou seja, a medida do ângulo α (em radianos) é numericamente igual à medida do comprimento do arco l que o subtende.

No ciclo trigonométrico padronizou-se marcar os arcos no sentido anti-horário (sentido positivo). Todavia, também, marcam arcos no sentido horário, mas, neste caso, deverão estar acompanhados de um sinal negativo.



Assim, pode-se trabalhar com arcos maiores do que 360° . Por exemplo:

$\widehat{AM} = 2500^\circ$. (de' mais do que uma volta, pois cada volta completa compreende 360°)

$$\begin{array}{r} 2500^\circ \\ - 2160^\circ \\ \hline 340^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) 360} \\ 6 \text{ VOLTAS} \end{array}$$

Ou seja, o arco $\widehat{AM}$ dá 6 voltas (no sentido antihorário) e para em 340° .

Outro seja, escreveremos:

$$\widehat{AM} = \underbrace{6 \times 360^\circ}_{\substack{\uparrow \\ \text{N}^\circ \text{ DE} \\ \text{VOLTAS NA} \\ \text{CICLO}}} + \underbrace{340^\circ}_{\substack{\uparrow \\ \text{ONDE ELE PARA} \\ \text{(EXTREMIDADE)}}}$$

Isto inspira definições e conceitos de expressão geral de um arco, como segue:

def.! Chamamos a EXPRESSÃO GERAL de um
 $\widehat{AM}$ a expressão da forma

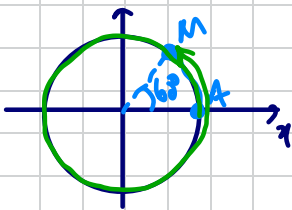
$$\widehat{AM}_k = k \cdot 360^\circ + \alpha ;$$

onde $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, onde tal arco α ,
positivo, chamamos a MENOR DETERMINAÇÃO DO
ARCO $\widehat{AM}$.

A expressão geral produz, na verdade, uma
família de ARCOS CÔNGUOS.

A saber, dois arcos são ditos CÔNGUOS
quando possuem mesma origem e extre-
midade, diferindo apenas no número de voltas.

EX: 01) os arcos de 60° e 420° são
cônguos; pois $420^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 60^\circ$



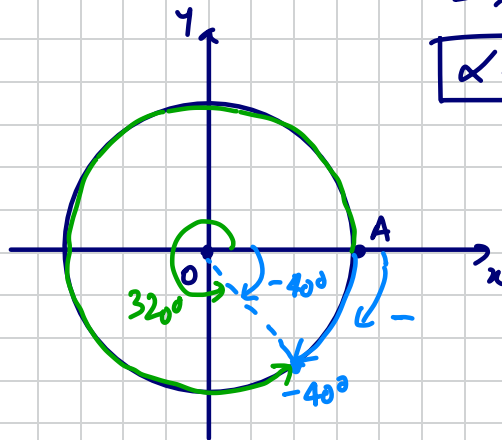
$\widehat{AM} = 420^\circ$, CÔNGUO
AO ARCO DE
 60° .

02) Qual a menor determinação do arco $\widehat{AT} = -1120^\circ$?

$$\begin{array}{r} -1120^\circ \quad | \quad 360 \\ \quad \quad \quad -3 \\ \hline +1080^\circ \\ \hline -40^\circ \end{array}$$

$$\alpha = 360^\circ - 40^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 320^\circ}$$



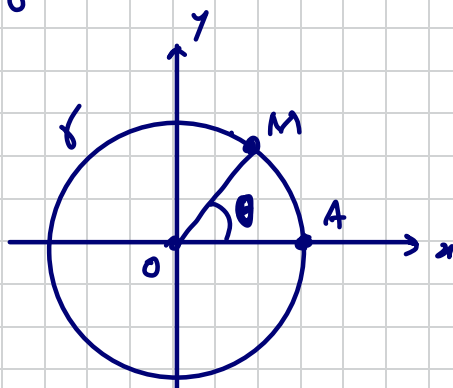
Resp.: A menor determinação do arco de -1120° é 320° .

NÚMEROS TRIGONOMÉTRICOS NO CÍRCULO:

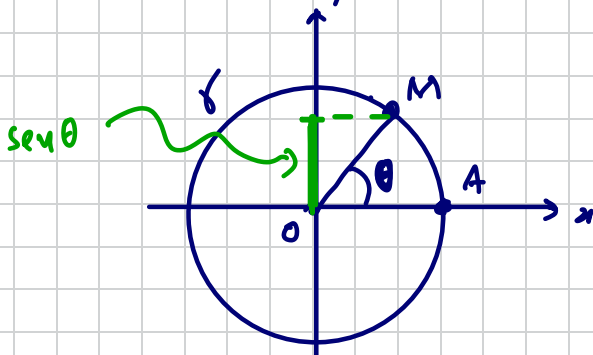
Def.: Seja γ o círculo trigonométrico e destaque o arco $\widehat{AM}$ sobre γ .

Seja θ o ângulo subtendido.

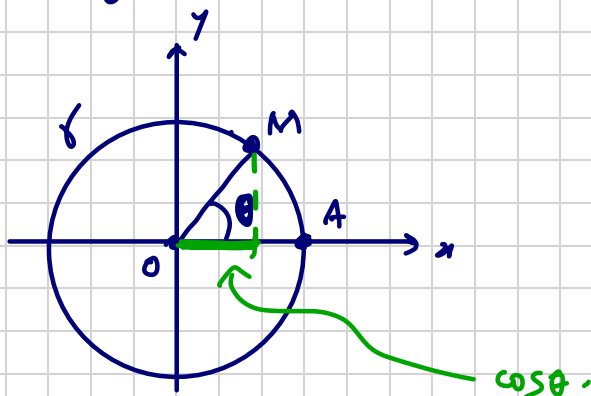
Definimos:



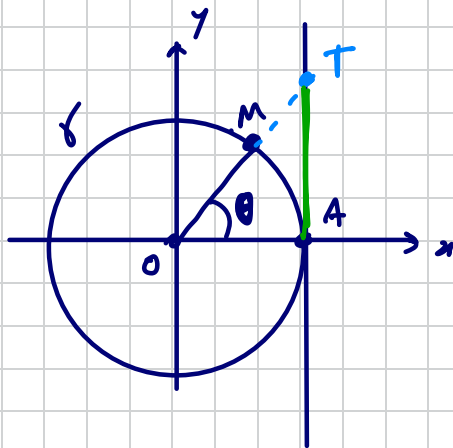
(a) seno de θ ($\text{sen } \theta$) como a medida da projeção do lado terminal do ângulo θ (raio $\overline{OM}$) sobre o eixo vertical.



(b) seno de θ ($\cos \theta$) como a medida da projeção do lado terminal do ângulo θ (raio $\overline{OM}$) sobre o eixo horizontal.



(c) tangente de θ ($\tan \theta$) como sendo a distância da origem dos arcos A até um ponto T sobre a reta tangente ao círculo no ponto A, obtido prolongando-se o lado terminal $\overline{OM}$ até esta reta.

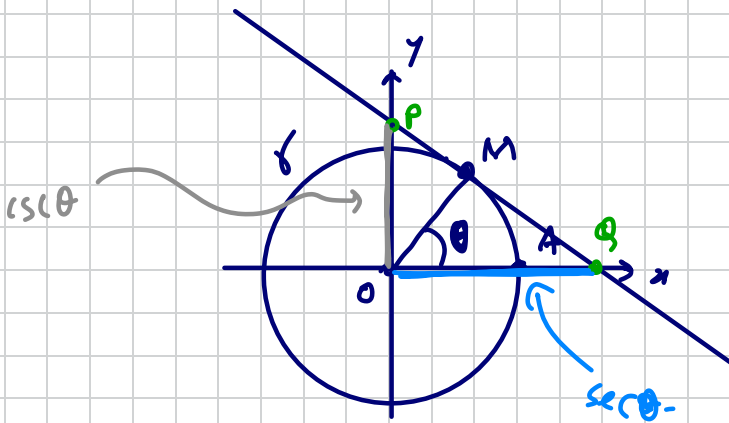


$$\tan \theta = \overline{AT}$$

(d) cosecante de θ ($\csc \theta$) e secante de θ ($\sec \theta$)

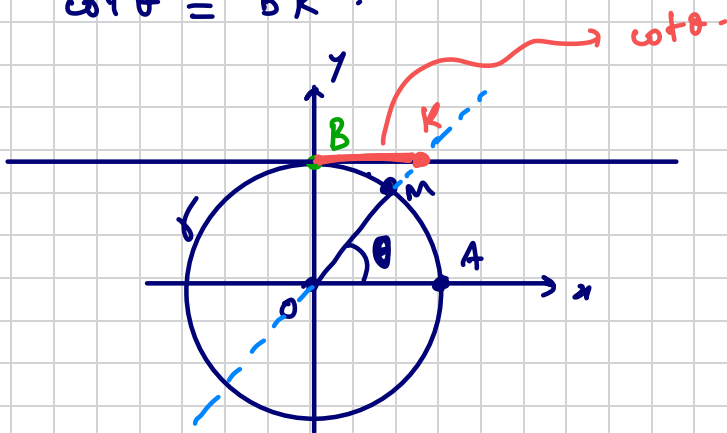
Traçando-se uma reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto M (extremidade do arco) esta reta interceptará os eixos coordenados em pontos P (sobre o eixo y) e Q (sobre o eixo x). Define-se :

$$\csc \theta = \overline{OP} \quad \text{e} \quad \sec \theta = \overline{OQ}.$$

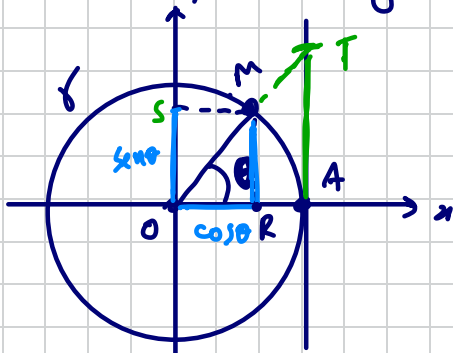


(e) cotangente de θ ($\cot \theta$) seja B o intercepto entre a circunferência unitária e o semi-eixo vertical positivo. Traçamos uma reta tangente ao círculo neste ponto. Seja K o intercepto entre esta reta tangente e a reta suporte ao lado terminal $\overline{OM}$ do arco θ . Definimos

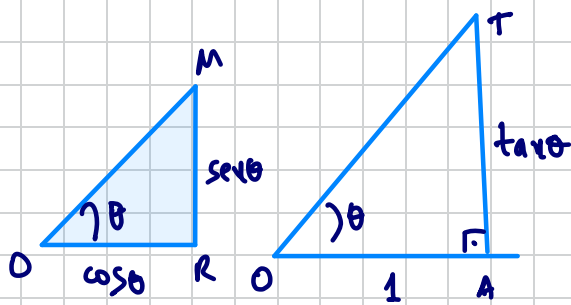
$$\cot \theta = \overline{BK}.$$



Das definições (geométricas) deduzimos relações entre estes números trigonométricos.

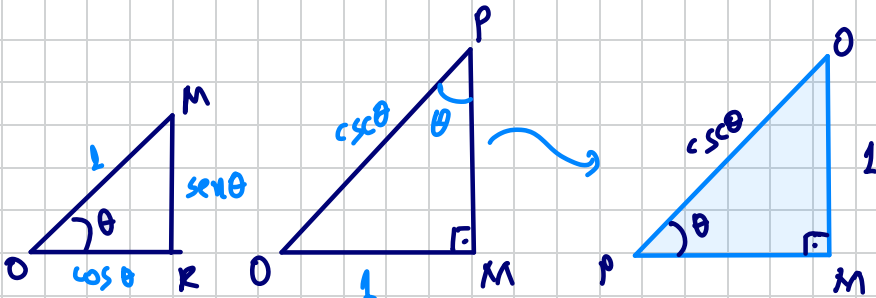
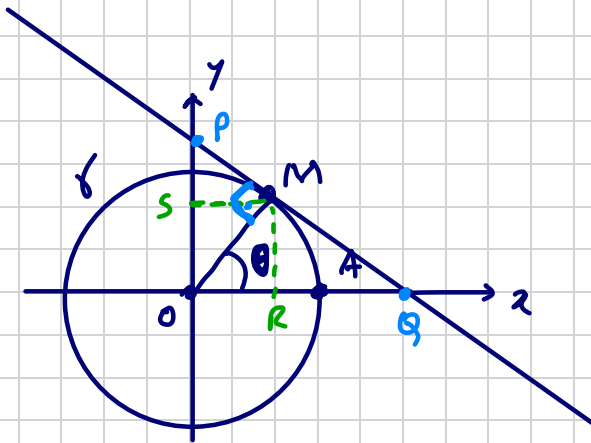


$$\overline{AT} = \tan \theta.$$



Por semelhança de triângulos (caso AAA),
tem-se que:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{\tan \theta}{1} \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}}$$



Sei semelhança de triângulos, segue que:

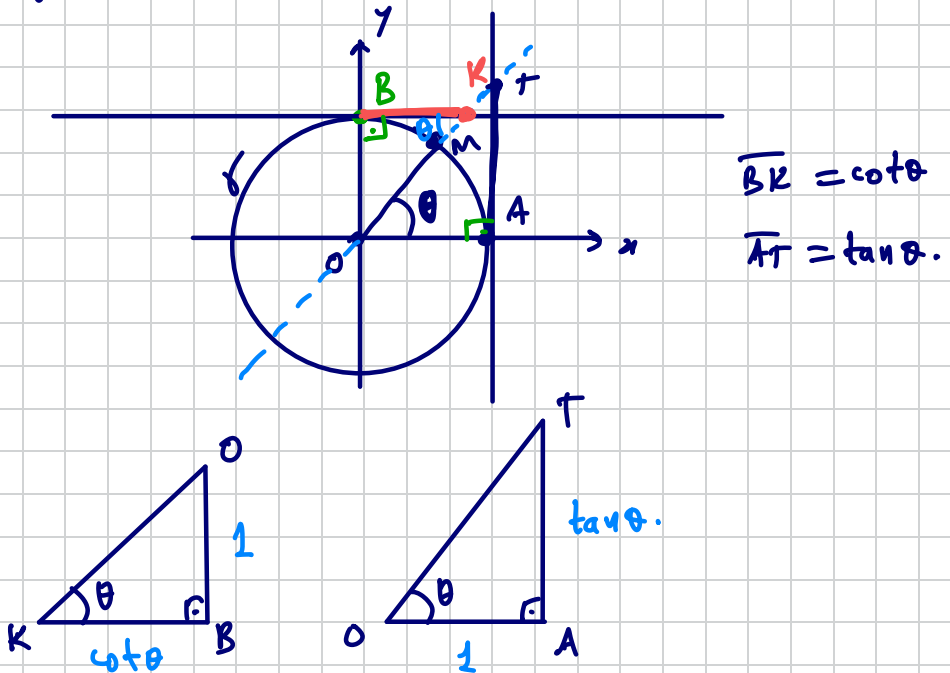
$$\frac{1}{\sec \theta} = \frac{\csc \theta}{1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\csc \theta = \frac{1}{\sec \theta}}$$

Analogamente se mostra que

$$\boxed{\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}}$$

Sei fim, considerando o esquema:



Sei semelhança de triângulos, obtemos:

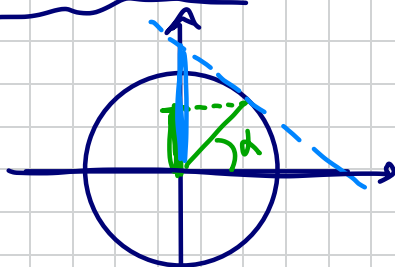
$$\frac{1}{\cot \theta} = \frac{\tan \theta}{1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}}$$

SINAIS DOS NÚMEROS TRIGONOMÉTRICOS:

(a) seno e cosseno:

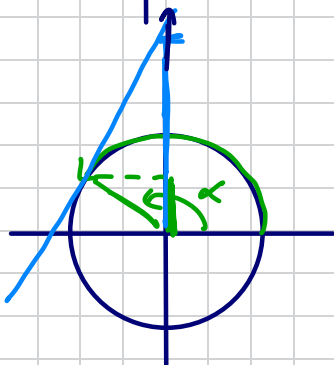
1.º q:



$$\csc \alpha > 0$$

$$\sec \alpha > 0$$

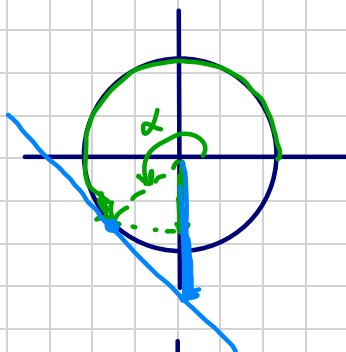
2.º q:



$$\csc \alpha > 0$$

$$\sec \alpha > 0$$

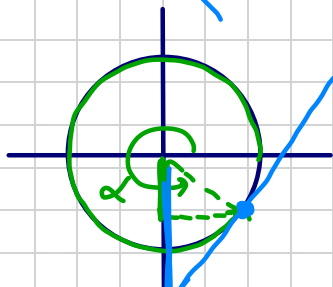
3.º q:



$$\csc \alpha < 0$$

$$\sec \alpha < 0$$

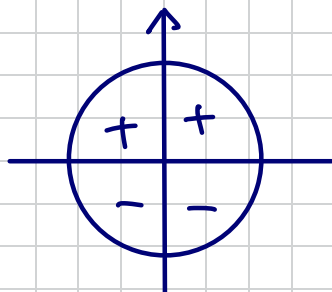
4.º q:



$$\csc \alpha < 0$$

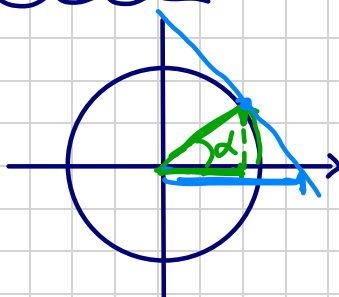
$$\sec \alpha < 0$$

RESUMO DOS SINAIS PARA SENO E COSSECANTE:



b) coseno e secante:

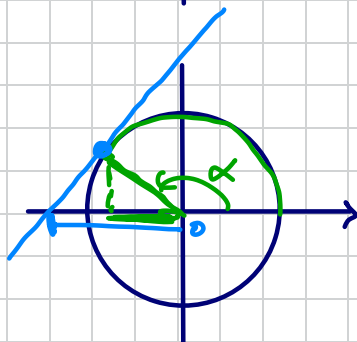
1º q:



$$\sec \alpha > 0$$

$$\cos \alpha > 0$$

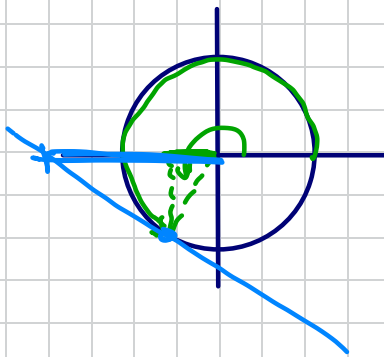
2º q:



$$\sec \alpha < 0$$

$$\cos \alpha < 0$$

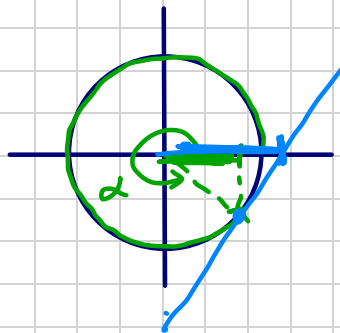
3º q:



$$\sec \alpha < 0$$

$$\cos \alpha < 0$$

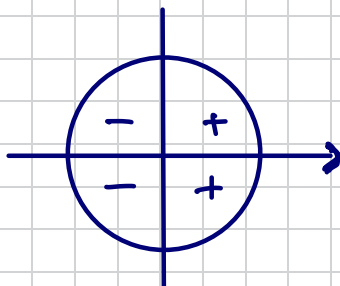
1º q:



$$\sec \alpha > 0$$

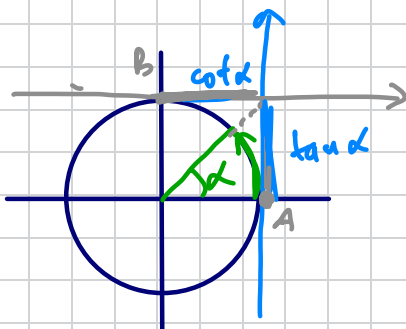
$$\cos \alpha > 0$$

RESUMO DE SINAIS PARA COSSENO E SECANTE:



(c) tangente e cotangente:

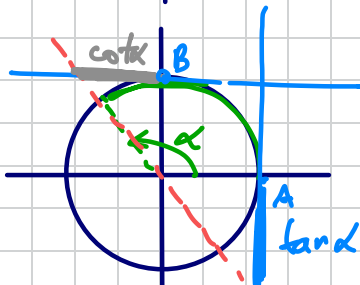
1º q:



$$\cot \alpha > 0$$

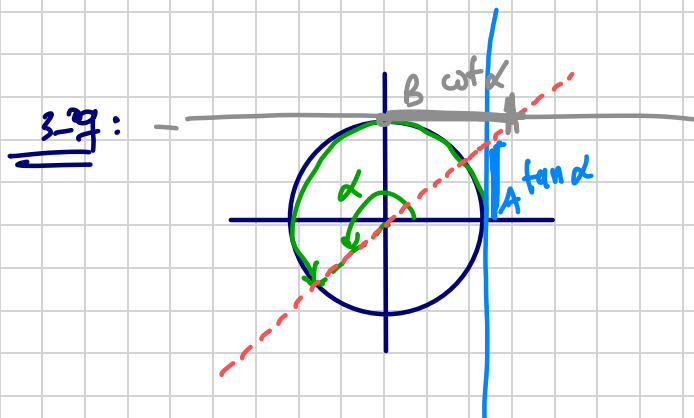
$$\tan \alpha > 0$$

2º q:



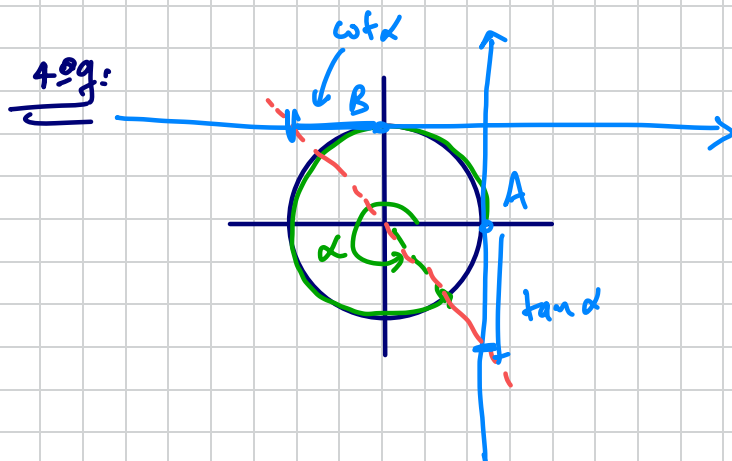
$$\cot \alpha < 0$$

$$\tan \alpha < 0$$



$$\cot \alpha > 0$$

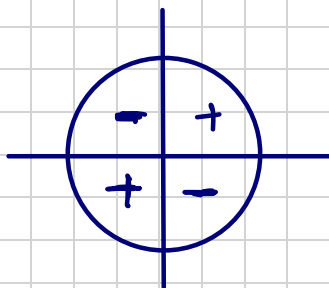
$$\tan \alpha > 0$$



$$\cot \alpha < 0$$

$$\tan \alpha < 0$$

RESUMO DOS SINAIS PARA TANGENTE E COTANGENTE:

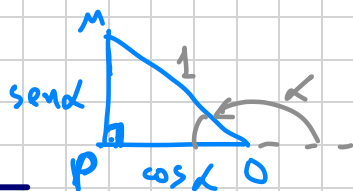
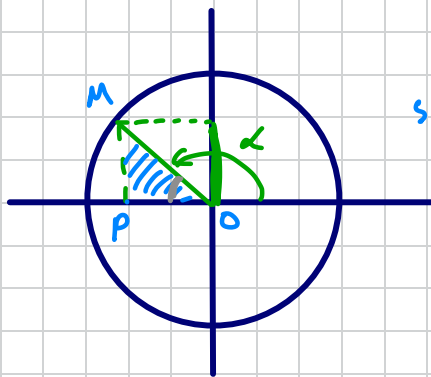


Na aula passada, quando iniciamos o estudo da Trigonometria, mostramos a relação trigonométrica fundamental "fórmula"

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ onde}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$. (pois pode ser deduzida usando triângulo retângulo).

De fato, considerando α destacado no círculo trigonométrico:



De fato, de
PITÁGORAS:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

com $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ[$.

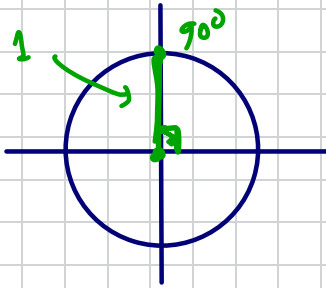
Isso se aplica nos demais quadrantes.

Basta verificar nas extremidades dos quadrantes.

0° ; 90° ; 180° ; 270° ; 360° e arcos cômplementares.

After cosines previous verifications partially:

$$\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ \stackrel{?}{=}$$



$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\Rightarrow (1)^2 + 0^2 = 1. \quad \underline{\underline{\text{OK!}}}$$