

Nas aulas anteriores vimos novas regras de derivação. Vejamos outros exemplos.

Ex: Calcule a derivada de :

(a) $y = \tan \sqrt{x}$

(b) $y = e^{x^2} \cdot \cos(x - x^2)$

Solução:

(a) $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$

$$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$(u^k)' = k u^{k-1} \cdot u'$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

obs.: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Portanto; $y' = \sec^2 u \cdot u'$

$$y' = \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sec^2 \sqrt{x}$$

1b) $y = e^{x^2} \cdot \cos(x - x^2)$. $y' = ?$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + u' \cdot v, \text{ onde:}$$

- $u = e^{x^2} \Rightarrow u = e^w \Rightarrow u' = w' \cdot e^w$
 $w = x^2 \Rightarrow w' = 2x$
 $u' = 2x \cdot e^{x^2}$

- $v = \cos(x - x^2) =$

$$\cos w \Rightarrow v' = -\sin w \cdot w'$$

$$w = x - x^2 \Rightarrow w' = 1 - 2x$$

$$\Rightarrow v' = -\sin(x - x^2) \cdot (1 - 2x)$$

$$v' = (2x - 1) \cdot \sin(x - x^2)$$

Sobretudo, lembrar:

$$y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$y' = e^{x^2} \cdot (2x-1) \cdot \sin(x-x^2) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot \cos(x-x^2)$$

02) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = x \cdot \ln(x-1)$ no ponto onde $x = 2$.

Solução:

$P(2, f(2))$, onde

$$f(2) = 2 \cdot \ln(2-1) = 2 \cdot \ln 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Logo $P(2, 0)$.

A reta tangente neste ponto P será dada

por:

$$y - y_p = m(x - x_p), \text{ onde } m = f'(2).$$

$$\text{sendo } f(x) = x \cdot \ln(x-1). = u \cdot v$$

$$\Rightarrow y' = u \cdot v' + u' \cdot v, \text{ onde:}$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v = \ln(x-1) \Rightarrow v' = \frac{1}{x-1}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{(x-1)'}{x-1} = \frac{1-0}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Assim:

$$y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$y' = x \cdot \frac{1}{x-1} + 1 \cdot \ln(x-1)$$

$$y' = f'(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$$

Logo:

$$f'(2) = \frac{2}{2-1} + \ln(2-1) = \frac{2}{1} + \underbrace{\ln 1}_{=0} = 2 //$$

$$\Rightarrow m = f'(2) = 2$$

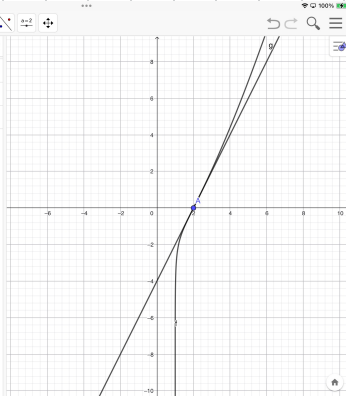
Assim, a eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(2, 0)$, com $m = f'(2) = 2$, será:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$y - 0 = 2 \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{y = 2x - 4}$$

ILUSTRAÇÃO GRÁFICA DA
RESOLUÇÃO DO
PROBLEMA.



03) Derive a função: $f(x) = 4x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 4x}$.

Solução: Primeiramente, escreva:

$$y = 4x^3 + (x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}} = u + v$$

$$\Rightarrow y' = u' + v', \text{ onde:}$$

$$u = 4x^3 \Rightarrow u' = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot 1 = 12x^2$$

$$v = (x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow v' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 4x)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (2x - 4)$$

$$v' = \frac{1}{3} (x^2 - 4x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 4)$$

$$v' = \frac{2x - 4}{3 (x^2 - 4x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x - 4}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}}$$

$$(n^k)' = k n^{k-1} \cdot n'$$

Portanto, obtemos:

$$y' = u' + v'$$

$$y' = 12x^2 + \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$$

obs: Outras notações para o símbolo de derivada:

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = D_x f(x)$$

SIGNIFICADO FÍSICO DA DERIVADA:

Na física, dada a função horária que descreve o deslocamento de um objeto ao longo do tempo: $x = x(t)$; a velocidade média nos instantes t_0 a t é dada por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{onde}$$

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) \quad e$$

$$\Delta t = t - t_0.$$

A velocidade instantânea (ou, velocidade) é dada pelo limite:

$$\begin{aligned} \underline{v(t)} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ &= \underline{x'(t)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v(t) = x'(t).$$

Outra vez, a velocidade (instantânea) é dada pela derivada da posição.

Do mesmo modo a aceleração será dada por:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

$$a(t) = v'(t).$$

Sejam alguns exemplos:

- 01) Um móvel desloca-se de acordo com a função da posição $x(t) = t^2 - \sqrt{t}$, onde x expressa em metros e t em segundos. Qual a velocidade desse móvel no instante $t = 4s$?

Solução: $v(t) = x'(t)$, onde

$$x(t) = t^2 - t^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow v(t) = x'(t) = 2t - \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$v(t) = 2t - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Portanto,

$$v(4s) = 2 \cdot 4 - \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$v(4s) = 8 - \frac{1}{2 \cdot 2} = 8 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{31}{4} \text{ m/s}.$$

02) A equação da posição de um MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado) é dada por:

$$x = \overbrace{v_0}^{\text{const.}} + \overbrace{a_0}^{\text{const.}} t + \frac{a t^2}{2}.$$

A eq. da velocidade será dada por:

$$\underline{v = x'(t) = 0 + v_0 \cdot 1 + \frac{a}{2} \cdot 2t}$$

$$v = v_0 + a t$$

L4:

5. Uma carga de dinamite lança uma pedra pesada para cima com uma velocidade de lançamento de 160 pés/s. A pedra atinge uma altura de $S(t) = 160t - 16t^2$ pés após t segundos.

- (a) Qual a altura máxima atingida pela pedra?
- (b) Quais são a velocidade e o módulo da velocidade da pedra quando ela está à 256 pés do solo na subida? E na descida?
- (c) Quando a pedra atingirá o solo novamente?

$$s(t) = 160t - 16t^2$$

(a) A altura será máxima quando $v = 0$.

$$v(t) = s'(t)$$

$$v(t) = 160 - 32t = 0$$

para chegar na altura máxima.

$$\Leftrightarrow 160 - 32t = 0$$

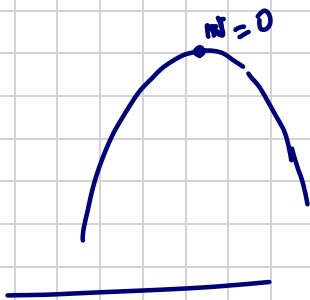
$$32t = 160 \Rightarrow t = \frac{160}{32} = \underline{\underline{5s}}$$

Altura,

$$h(5) = 160 \cdot (5) - 16(5)^2$$

$$= 800 - 400 = 400 \underline{\underline{pés}}$$

(b)



$n = ?$ quando $h(4) = 256$

$$h(t) = 160t - 16t^2$$

$$256 = 160t - 16t^2$$

$$16t^2 - 160t + 256 = 0 \quad (\div 16)$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2 \cdot 1}$$

corrigido.

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\frac{10 + 6}{2} = 8$$

$$\frac{10 - 6}{2} = 4$$

Anim, quando $t = 4s$; teremos:

$$v(4) = 160 - 32(4) = 160 - 128 = 32 \text{ pés/s}.$$

quando $t = 8s$, teremos: módulo: 32 pés/s:

$$v(8) = 160 - 32 \cdot (8) = 160 - 256 = -96 \text{ pés/s}.$$

módulo: 96 pés/s.

(c) altura zero $s(t) = 0$:

$$160t - 16t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 = 160$$

$$t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4s.$$