

AULA DE EXERCÍCIOS

L4:

3. Usando apenas a definição de derivada, obtenha a função derivada de cada função a seguir e a equação da reta tangente ao gráfico de f em cada ponto x_0 indicado

(a) $f(x) = \sqrt{1-3x}$, $x_0 = -1$

(b) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 2$

(c) $f(x) = x - \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

(a) $y = \sqrt{1-3x}$; $x_0 = -1$.

$$f'(x) = ?$$

Dele Definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3 \cdot (x+h)} - \sqrt{1-3x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x-3h} - \sqrt{1-3x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x-3h} - \sqrt{1-3x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x}}{\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-3x-3h})^2 - (\sqrt{1-3x})^2}{h \cdot (\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{3x} - 3h - \cancel{1} + \cancel{3x}}{h \cdot (\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{\cancel{h} (\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{1-3x-3h} + \sqrt{1-3x}} = -\frac{3}{\sqrt{1-3x} + \sqrt{1-3x}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}}$$

A eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = -1$ será:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \text{ , onde}$$

$$m = f'(x_0) = f'(-1) \text{ ;}$$

$$\text{e como } f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} \text{ ; então:}$$

$$f'(-1) = \frac{-3}{2\sqrt{1-3(-1)}} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = \sqrt{1-3x_0}$$

$$\Rightarrow y_0 = \sqrt{1-3 \cdot (-1)} = \sqrt{1+3} = 2$$

Assim, temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4} \cdot (x - (-1))$$

$$\boxed{y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 1)}$$

L4

1. Verifique se cada função abaixo é contínua no ponto indicado:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}, & \text{se } x < 2 \\ 1 + x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{no ponto } x = 2.$$

Para verificar se f é contínua em $x=2$, precisamos verificar se

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

$$(i) \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(2)^2 - 2 \cdot (2) - 3}{(2)^2 - 1} =$$

$$\frac{\overset{+}{+}}{\underset{\nearrow}{2}} = \frac{-4-3}{4-1} = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + x^2 = 1 + (2)^2 = 1 + 4 = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Logo, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, o que mostra que

f não é contínua no ponto $x=2$.



L4:

4. Usando as regras de derivação estudadas em aula, calcule a derivada de cada função abaixo.

(a) $f(x) = -3x^4 - 5x^2 - x + 7$

(b) $f(x) = (3x^2 - 5x + 2)(1 - x - x^2)$

(c) $f(x) = \frac{3x-1}{1-4x}$

(d) $f(x) = \ln(4x^2 - 5x + 3)$

(e) $f(x) = \frac{\ln(3x-1)}{x^2 - 5x + 3}$

(f) $f(x) = (4x-3)^5 - \ln(1-x)$

(g) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

(h) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

(i) $f(x) = x^2 \sin x$

(j) $f(x) = 2x + \ln(\cos(1-2x))$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

(l) $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{1 - \tan \sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \frac{\ln(3x-1)}{x^2-5x+3}$. $y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} ; \text{ onde:}$$

$$u = \ln(3x-1) \Rightarrow u' = \frac{w'}{w} = \frac{3}{3x-1}$$

$$\rightarrow \ln w ; w = 3x-1 \Rightarrow w' = 3$$

$$v = x^2 - 5x + 3 \Rightarrow v' = 2x - 5$$

$$y' = \frac{u \cdot u' - u' \cdot u}{u^2} =$$

$$= \frac{(x^2 - 5x + 3) \cdot \frac{3}{3x-1} - \ln(3x-1) \cdot (2x-5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$= \frac{\frac{3(x^2 - 5x + 3) + (3x-1) \cdot (2x-5) \cdot \ln(3x-1)}{3x-1}}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$= \frac{3(x^2 - 5x + 3) + (3x-1)(2x-5) \cdot \ln(3x-1)}{(3x-1) \cdot (x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$(f) \quad f(x) = \underbrace{(4x-3)^5}_{n^k} - \underbrace{\ln(1-x)}_{\ln w}$$

$$(n^k)' = k \cdot n^{k-1} \cdot n' ; \quad (\ln w)' = \frac{w'}{w}$$

$$f'(x) = 5 \cdot (4x-3)^4 \cdot (4x-3)' - \frac{(1-x)^3}{1-x}$$

$$f'(x) = 5(4x-3)^4 \cdot (4) - \frac{-1}{1-x}$$

$$f'(x) = 20(4x-3)^4 + \frac{1}{1-x}$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} ; \text{ onde:}$$

$$u = -x \Rightarrow u' = -1$$

$$v = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1-x^2)'$$

$$(w^k)' = k \cdot w^{k-1} \cdot w'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$\Rightarrow n' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Annim, denominator:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot (-1) - (-x) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{-(\sqrt{1-x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{-(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1-x^2}{1}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$$

$$(k) \quad f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}} = (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$y = x^k \Rightarrow y' = k \cdot x^{k-1} \cdot x'$$

$$u = x + x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$u' = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$u' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Now, obtain:

$$f'(x) = k \cdot u^{k-1} \cdot u' = \frac{1}{3} \cdot (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x + \sqrt{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow$$

$$f'(u) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}}{3 \cdot (u - \sqrt{u})^{\frac{2}{3}}}$$

(2) $f(u) = \frac{\sin \sqrt{u}}{1 - \tan \sqrt{u}} = \frac{u}{v}$; onde:

$$u = \sin \sqrt{u} = \sin(u^{\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow u' = \cos(u^{\frac{1}{2}}) \cdot (u^{\frac{1}{2}})'$$

$$= \cos \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \cos \sqrt{u}$$

$$v = 1 - \tan \sqrt{u} = 1 - \tan(u^{\frac{1}{2}})$$

$$v' = 0 - \sec^2 u^{\frac{1}{2}} \cdot (u^{\frac{1}{2}})'$$

$$(\tan w)' = \sec^2 w \cdot w'$$

$$m' = -\sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot 1$$

$$m' = -\frac{\sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Portanto; sendo $y = \frac{u}{v}$, temos

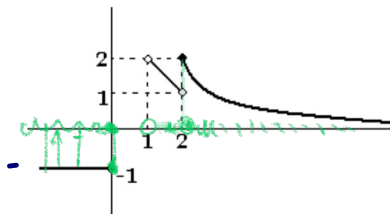
$$y' = \frac{u \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(1 - \tan \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x} \right) - \sec \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{\sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right)}{(1 - \tan \sqrt{x})^2}$$

$$y' = \frac{\frac{\cos \sqrt{x} \cdot (1 - \tan \sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\sec \sqrt{x} \cdot \sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1 - \tan \sqrt{x})^2}$$

L3:

3. Abaixo temos o gráfico de uma função. Determine seu domínio e sua imagem. Qual é o valor de $f(2)$? Diga quanto valem, se existirem, os limites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.



$$f(2) = 2.$$

$$D(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$Im(f) = \{-1\} \cup (0, 2].$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ pois } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

L₃

4. Verifique se existe o limite de cada função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nos pontos indicados abaixo. Existindo, calcule-o.

Ⓐ $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x < 2 \\ 9-4x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, no ponto $x=2$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) ?$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = 2 \cdot (2) - 3 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (9-4x) = 9 - 4 \cdot (2) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

$$\text{Logo, } \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1. \quad \underline{\underline{=}}$$

L2

15. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

$$t = 0 \Rightarrow m = m_0 \text{ (quant. inicial de } ^{14}\text{C)}$$

$$t = 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2}$$

$$t = 2 \cdot 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^2}$$

⋮

$$t = k \times 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^k}$$

$$k = \frac{t}{5730}$$

$$m(t) = m_0 \cdot \frac{1}{2^k} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Quanto tempo levou para que

$$m(t) = \frac{99,5}{100} m_0 \text{ ?}$$

Daí seja, substitua a equação:

$$\frac{99,5}{100} m_0 = m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{99,5}{100} \cdot \cancel{m_0} = \cancel{m_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{99,5}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log \frac{99,5}{100} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log \frac{99,5}{100} = \frac{t}{5730} \cdot \log(0,5)$$

$$t = \frac{5730 \cdot \log 0,995}{\log 0,5}$$

$$t \approx 41,44 \text{ anos.}$$

Logo, o quadro é falso, pois foi pintado a pouco mais de 41 anos atrás, mas Vermeer viveu entre 1632 a 1675.