CÁLCULO 1A

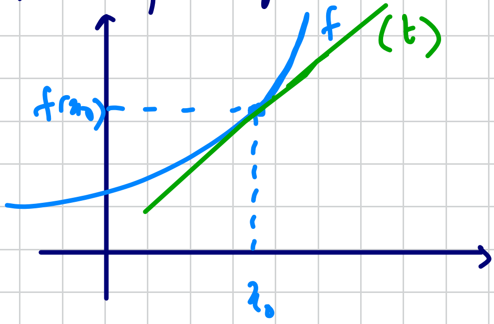
04/11/25 – AULA 13

Na aula passada iniciamos o estudo de derivadas. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in (a,b)$ se, e só se, existir o limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$f'(x_0)$ chama-se DERIVADA DE f NO PONTO x_0.

Vimos também que, geometricamente, a derivada de uma função em um ponto representa o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f naquele ponto.



A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE f NO PONTO x_0 SERÁ $f'(x_0)$.

A eq. da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

onde $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$.

Vejamos outros exemplos:

01) Qual a eq. da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{2x-1}$ no ponto onde $x = 1$?

Solução: $x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = \sqrt{2.(1)-1} = \sqrt{1} = 1$

$$P(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0 = f(x_0)}{1}).$$

A eq. da reta tangente ao gráfico de f neste ponto P será dada por:

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

$$y - 1 = m.(x - 1) \quad ; \quad \text{onde:}$$

$m = f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \overbrace{f(1)}^{=1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{\sqrt{2x-1} + 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\cancel{\sqrt{2x-1}}\right)^{\cancel{2}} - (1)^2}{(x-1) \cdot \left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 1 - 1}{(x-1) \cdot \left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{2\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)} \cdot \left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot (1) - 1} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1 \ //$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(1) = 1}$$

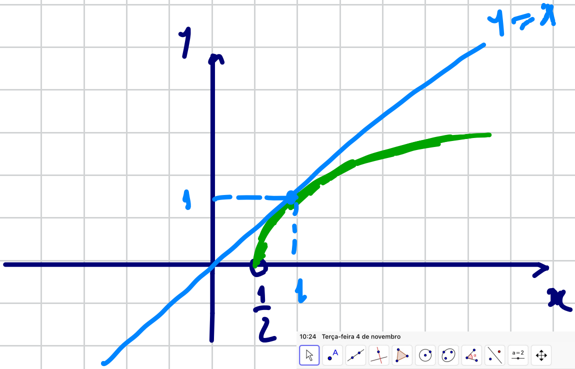
Conclusão:

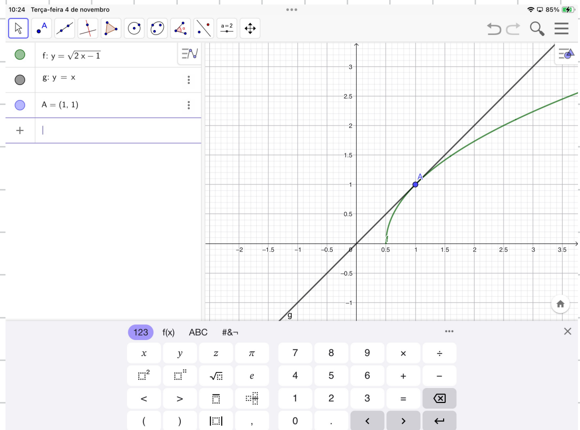
$$y - 1 = \overbrace{f'(1)}^{= m = 1.} \cdot (x-1)$$

$$y - 1 = 1 \cdot (x-1)$$

$$y - \cancel{1} = x - \cancel{1}$$

$$\boxed{y = x}$$





$y=\sqrt{2x-1}$

$2x-1>0$

$\iff 2x>1$

$\iff x>\frac{1}{2}$

$y=\sqrt{2x-1}$

$y^2=2x-1$

$y^2+1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$

02) Obtenha a eq. da reta tangente ao gráfico de $y=\dfrac{x}{x-1}$ no ponto onde $x=3$.

SOLUÇÃO: $f(3)=\dfrac{3}{3-1}=\dfrac{3}{2}$. $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$

A eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ será dada por:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

$$\boxed{y - \frac{3}{2} = m \cdot (x-3)} \quad ; \text{ onde:}$$

$m = f'(3)$. Disso:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{3}{2}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2x - 3(x-1)}{2(x-1)}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2x - 3x + 3}{2(x-1)}}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-x+3}{2(x-1)} \cdot \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}}{2(x-1)\cancel{(x-3)}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{2(x-1)} = \frac{-1}{2(3-1)} = -\frac{1}{4}$$

Portanto, a eq. da reta tangente em $x = 3$ será:

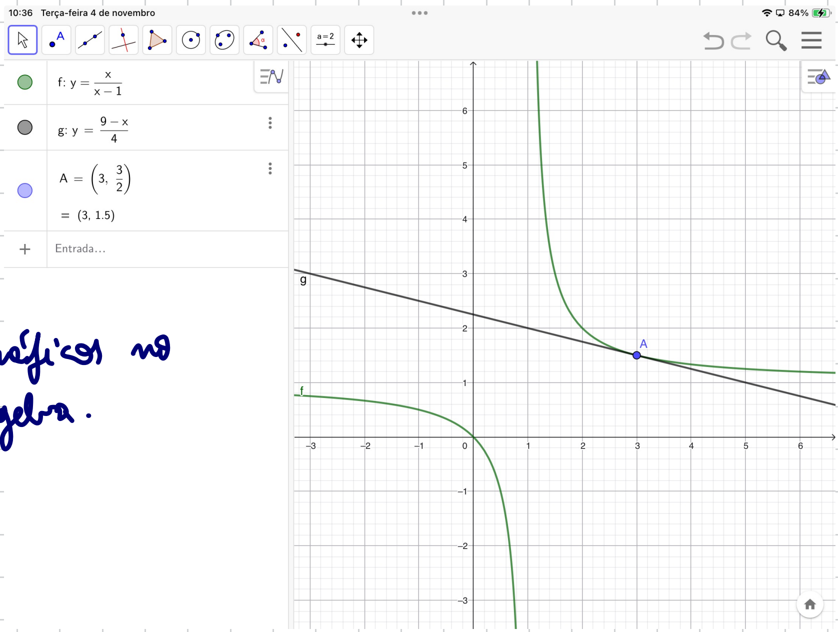
$$y - \frac{3}{2} = \underbrace{m}_{= f'(3) = -\frac{1}{4}} (x-3)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{9-x}{4}}$$



esboço gráficos no geogebra.

Def.: Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Definimos a FUNÇÃO DERIVADA $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ex.: $f(x)=x^2 \Longrightarrow f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}2x+h=2x+0=2x$$

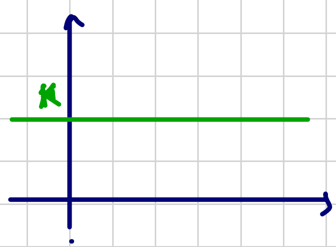
Conclusão: $f'(x)=2x$.

Tanto calcular a derivada em um ponto quanto a função derivada pela definição é muito trabalhosa. Então, precisamos desenvolver regras para tornar este cálculo mais simples.

PRIMEIRAS REGRAS DE DERIVAÇÃO:

Sejam $y = f(x)$; u, v e w funções de x, e K uma constante. Valem as regras:

01) $y = K \Rightarrow y' = 0$



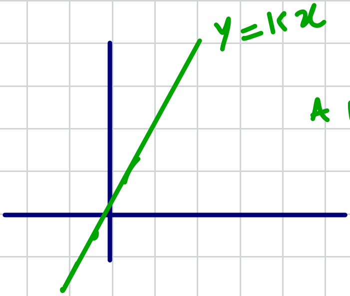
$f(x) = K$

De fato,

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{K} - \overbrace{f(x)}^{K}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{K - K}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

02) $y = k \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = k.$



A INCLINAÇÃO DESTA RETA É K.

De fato, sendo $f(x) = k \cdot x$, então:

$$\underbrace{f'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - kx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{k x} + k \cdot h - \cancel{k x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cancel{h}}{\cancel{h}} = \underbrace{k.}$$

Ex.: a) $y = -5x \quad \Rightarrow \quad y' = -5.$

b) $y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1.$

03) $y = u + v \Longrightarrow y' = u' + v'$

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$. Assim:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{= u'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{v'(x)} =$$

$$= u'(x) + v'(x)$$

Ex: $y = 5x + 7 \Longrightarrow y' = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x \Rightarrow u' = 5 \\ v = 7 \Rightarrow v' = 0 \end{array}\right\} y = u + v$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{y'} = u' + v' = 5 + 0 = \underset{\sim}{5}$$

---

04) $y = v^k \Rightarrow y' = k \cdot v^{k-1} \cdot v'$. $(k \in \mathbb{R})$

Provaremos para $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Seja $f(x) = [v(x)]^k$. Assim:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h)^k - v(x)^k}{h} \overset{(*)}{=}$$

RECORDE DO ENSINO FUNDAMENTAL:

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b).(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\vdots$$

$$a^k - b^k = (a-b)\cdot(a^{k-1} + a^{k-2}\cdot b + \dots + b^{k-1})$$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(v(x+h) - v(x))}{h}}_{v'(x)} \cdot \left[v(x+h)^{k-1} + v(x+h)^{k-2}\cdot v(x) + \dots + v(x)^{k-1} \right]$$

$$= v'(x)\cdot\left[k\cdot [v(x)]^{k-1}\right] = k\cdot v^{k-1}\cdot v'.$$

$$y = v^k \Rightarrow y' = k\cdot v^{k-1}\cdot v'.$$

Exemplos:

(a) $y = x^2 \Rightarrow y' = ?$

$$\boxed{v = x \Rightarrow v' = 1}$$

$$y = v^k \Rightarrow y' = k\cdot v^{k-1}\cdot v'. \qquad k = 2$$

$$y' = 2\cdot x^{2-1}\cdot 1 = 2x$$

$$\Rightarrow y' = 2x.$$

(b) $y = x^3 \Rightarrow y' = ?$

$$y = r^k \Rightarrow y' = k \cdot r^{k-1} \cdot r'$$

$$r = x \Rightarrow r' = 1. \quad ; \quad k = 3$$

$$y' = 3 \cdot x^{3-1} \cdot 1 \Rightarrow \boxed{y' = 3x^2}$$