ÁLGEBRA LINEAR I

27/11/25 – AULA 18

Na aula retrasada (aula 16) vimos alguns teoremas sobre bases. O último teorema dizia:

TEOREMA: Seja V espaço vetorial gerado por um número finito de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Então, qualquer conjunto com mais do que n vetores será L.D.

Uma importante consequência desse teorema é o seguinte corolário:

COROLÁRIO: Qualquer base de um espaço vetorial V possui a mesma quantidade de vetores.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\beta_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ e $\beta_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ duas bases de um mesmo espaço vetorial V. Vamos mostrar que $m = k$.

De fato, como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ é L.I. (pois é base de V) e $\beta_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ é base de V, segue pelo teorema acima (sua negação), que $\boxed{m \leq k.}$ $(*)$

Do mesmo modo, como $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ é L.I. em V (pois é base de V) e $\beta_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ é base de V, segue que $\boxed{k \leq m.}$ $(**)$

De $(*)$ e $(**)$ segue que $m = k$; o que prova o corolário. $\square$

Assim, dado um espaço vetorial V, se destacarmos uma base de V que possua m vetores, qualquer outra base de V possuirá, também, m vetores.

Este resultado inspira o seguinte conceito:

Def.: Chama-se <u>DIMENSÃO</u> de um espaço vetorial V a quantidade de vetores de uma de suas bases.

Denotamos a dimensão de um espaço vetorial V por $\dim V$.

<u>EXEMPLOS:</u>

01) $V = \mathbb{R}^3$. Temos que o conjunto $\beta = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$; formada por 3 vetores L.I.

Logo, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Em geral, $\dim \mathbb{R}^m = m$.

02) $V = P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2.

Perguntamos: qual o valor de $\dim P_2$?

AF.: $\dim P_2 = 3$.

Tome, por exemplo, o conjunto

$$\beta = \{1, x, x^2\}.$$

Vamos mostrar que β é base de P_2, mostrando que:

(i) β é L.I;

(ii) $[\beta] = P_2$.

(i): $a.1 + b.x + c.x^2 = 0 + 0x + 0x^2 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$ Logo, β é L.I.

(ii): $[\beta] = P_2$. Obviamente $[\beta] \subset P_2$.

Resta mostrar que $P_2 \subset [\beta]$.

Dado $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$.

Então:

$p(x) = a.1 + b.x + c.x^2 \in [\beta]$, pois é uma comb. linear dos vetores 1, x e x^2.

Portanto, vale (ii)

Então, de fato, o conj. $\beta = \{1, x, x^2\}$ é uma base de P_2, formada por 3 vetores.
Logo, $\dim P_2 = 3$.

Obs.: Em geral, $\dim P_n = n+1$.

03) $V = \mathbb{R}^3$ e seja
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \text{ e } y - z = 0\}$$

Afirmamos que W é um subespaço vetorial de V. (exercício).

Perguntamos: $\dim W = ?$

Note que, podemos (e devemos) escrever:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \text{ e } z = y\} =$$

$$= \{(-2y, y, y) : y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{ y.(-2,1,1) : y \in \mathbb{R} \} = [(-2,1,1)],$$

ou seja W é o subespaço gerado por um único vetor não nulo (que é $(-2,1,1)$).

Logo, $(-2,1,1)$ serve como uma base para W. Disso, tem-se que $\dim W = 1$.

04) $V = \mathbb{R}^3$ e seja

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \}.$$

$\dim W = ?$

<u>Solução</u>:

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z \} =$$

$$= \{ (2y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (2y, y, 0) + (-z, 0, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ y.(2,1,0) + z.(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(2,1,0) ; (-1,0,1)] \; ;$$

e como $\{(2,1,0) ; (-1,0,1)\}$ é L.I. (exercício); serve como base para W. Então, $\dim W = 2$.

<u>Obs</u>: Existem espaços vetoriais com dimensão infinita. Neste caso, escreve-se $\dim V = \infty$. Porém, tais espaços não são objetos de estudo em um curso de Álgebra Linear, sendo vistos, geralmente, em cursos de Análise Funcional. No entanto, algum exemplo simples pode ser apresentado aqui.

Sendo $C[a,b]$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, do cálculo, podemos representar funções a partir de séries de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Logo, o conjunto

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

vai ser uma base para $C[a,b]$. Então, $\dim(C[a,b]) = \infty$.

Porém, no curso de Álgebra linear, lidaremos com espaços vetoriais de dimensão finita: ou seja, espaços V tais que $\dim V < \infty$.

<u>TEOREMA</u> (TEOR. DO COMPLETAMENTO) Qualquer coleção de vetores L.I. de um espaço vetorial pode ser completado de modo a formar uma base.

<u>DEMONSTR.</u>: Seja V um vetorial, com $\dim V = n$. Seja $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ uma coleção de vetores L.I. em V.

Se $k = n$ então β já é uma base para V.

Suponha que $k < n$. Então, segue que

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k] \neq V.$$

Então, existe pelo menos um vetor em V que não se escreve como comb. linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$. Vamos denotar este vetor por $\vec{v}_{k+1}$.

Então, o conj: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ ainda é L.I., pois como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ é L.I; então

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0} \Leftarrow \alpha_j = 0,$$
$$j \in \{1, \dots, k\}.$$

Assim, adicionando $\alpha_{k+1} \cdot \vec{v}_{k+1}$; teremos

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k + \alpha_{k+1} \cdot \vec{v}_{k+1} = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$\alpha_{k+1} = 0$ (pois os outros α_j's já são zeros)

Então, se $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}] = V$,

então o conj. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}\}$ será base de V

(e, neste caso, $k+1 = n$). Se não for,

então existe outro vetor $\vec{v}_{k+2} \in V$ que

não é comb. linear dos $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}$.

Então, o conj.

$$\{\underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}}_{\text{L-I.}}, \underline{\vec{v}_{k+2}}\} \text{ ainda}$$

ficará L-I.

Se $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}] = V$, então o

conj. acima será base. E, se

$$[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}] \neq V, \text{ então ainda}$$

existe outro vetor $\vec{v}_{k+3}$ que não é comb.

linear dos $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}$.

Repete-se esse processo um número

finito de vezes até obtermos um conj.

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \text{ tal que}$$

$[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n] = V$; formando, assim, uma base para V.

$\square$

Ex.: $V = \mathbb{R}^3$; e os vetores do conjunto

$$\beta = \{(1,2,0) ; (1,1,1)\}$$

são L.I., pois:

$$a.(1,2,0) + b.(1,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \\ \boxed{b = 0} \end{cases} \longrightarrow \boxed{a = 0}$$

Assim, como o conj. β é L.I. e é formado por 2 vetores, e como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, pelo teorema do completamento provado acima, podemos acrescentar um terceiro vetor em β de modo a formar uma base para o $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo, tomemos o vetor

$$\vec{u} = (1, 0, 0).$$

então, o conj.

$$\tilde{\beta} = \{(1,2,0);\ (1,1,1);\ (1,0,0)\},$$

se for L.I; será base para $\mathbb{R}^3$, pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Verificando se $\tilde{\beta}$ é L.I:

$$a(1,2,0) + b\cdot(1,1,1) + c\cdot(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ \boxed{b = 0} \end{cases}$$

$2a = 0$

$a = 0$

$$\overbrace{a + b}^{=0} + c = 0$$

$\therefore$ $\boxed{c = 0}$

Então $\tilde{\beta}$ é L.I, e como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$,

e $\tilde{\beta}$ é formado por 3 vetores L.I, segue que $\tilde{\beta}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

Obs.: Com o conceito de dimensão de um espaço vetorial, sabendo que $\dim V = n$, se β for um conj. L.I. formado por n vetores, o mesmo será uma base para V, não precisando mostrar que $[\beta] = V$.

TEOREMA DA DIMENSÃO: Sejam U e W dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

DEMONSTR.: Veremos na aula seguinte.
(usaremos o teorema do completamento para a demonstração).