

AULA DE EXERCÍCIOS:LISTA 04:

7. Mostre que os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:

(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

(b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

(a) $V = \mathbb{R}^4$.

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$

$$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -y \text{ e } z = t\}$$

$$= \{(-y, y, t, t) : y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $\vec{u} + \vec{v} \in W$ e $\alpha \cdot \vec{u} \in W$.

Como $\vec{u}, \vec{v} \in W$, então são da forma:

$$\vec{u} = (-a, a, b, b) ; \quad \vec{v} = (-p, p, q, q),$$

onde $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

Assim, temos:

$$(i) \underline{\vec{u}} + \underline{\vec{v}} = (-a, a, b, b) + (-p, p, q, q)$$

$$= (-a-p, a+p, b+q, b+q)$$

$$= (-(a+p), a+p, b+q, b+q) \in \underline{W}$$

$$(ii) \underline{\alpha \cdot \vec{u}} = \alpha \cdot (-a, a, b, b) =$$

$$= (-\alpha \cdot a, \alpha \cdot a, \alpha b, \alpha \cdot b) \in \underline{W}$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

$$(b) S = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0, z = 0 \}$$

$$= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = 2x + y, z = 0 \}$$

$$= \{ (x, y, 0, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$\text{Dados } \underline{\vec{u}} = (a, b, 0, 2a + b) \text{ e}$$

$$\underline{\vec{v}} = (m, n, 0, 2m + n) \text{ em } S \text{ e}$$

dado $\alpha \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que:

$$(i') \quad \vec{u} + \vec{v} \in S ;$$

$$(ii') \quad \alpha \cdot \vec{u} \in S. \quad \text{De fato:}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{u} + \vec{v} &= (a, b, 0, 2a+b) + (m, n, 0, 2m+n) \\ &= (a+m, b+n, 0, \underline{2a+b} + \underline{2m+n}) \\ &= (a+m, b+n, 0, 2(a+m) + b+n) \in S. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \alpha \cdot \vec{u} &= \alpha \cdot (a, b, 0, 2a+b) = \\ &= (\alpha a, \alpha b, 0, \alpha \cdot (2a+b)) \\ &= (\alpha a, \alpha b, 0, 2(\alpha a) + \alpha b) \in S \end{aligned}$$

Por (i') e (ii') segue que S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

8. Considerando os subespaços vetoriais W e S do exercício anterior, determine os subespaços $S \cap W$ e $S + W$.

Note que:

$$S = \{(x, y, 0, 2x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(-y, y, t, t) : y, t \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{ (x, y, 0, 2x+y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x, 0, 0, 2x) + (0, y, 0, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \cdot (1, 0, 0, 2) + y \cdot (0, 1, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, 1)].$$

$$W = \{ (-y, y, t, t) : y, t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (-y, y, 0, 0) + (0, 0, t, t) : y, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ y \cdot (-1, 1, 0, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 1) : y, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(-1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1)]$$

$$S + W = [(1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, 1); (-1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1)]$$

(representando S e W como subespaços gerados,
então $S+W$ é formado juntando os seus geradores)

Para obter $S \cap W$ precisamos satisfazer todas
as condições que definem cada um deles, ou seja,

precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Diagram showing the reduction of the system:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

From the second equation, $x = -y$.

$$2(-y) + y = 0$$
$$-y = 0$$
$$y = 0$$
$$x = 0$$

Então, a única solução do sistema montado acima é a homogênea, ou seja: $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

conclusão: $S \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$, chamado de subespaço trivial.

Obs.: concluindo que, como $S \cap W = \{\vec{0}\}$, então concluindo que $S + W$ é uma soma direta, i.e., $S \oplus W$.

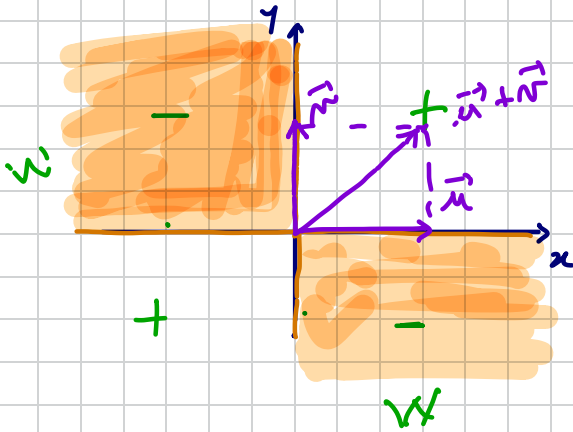
L4

(similar ao da Avaliação 05)

9. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere o subconjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}.$$

Desenhe $W \subset \mathbb{R}^2$ e verifique se W é um subespaço vetorial, justificando sua resposta.



$\therefore$ não é subespaço
vetorial do $\mathbb{R}^2$,
pois, por exemplo:
 $\vec{u} = (1, 0)$;
 $\vec{v} = (0, 1)$,

não há, que: $1 \cdot 0 \leq 0$ e $0 \cdot 1 \leq 0$;

logo, $\vec{u}, \vec{v} \in W$; mas:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1), \text{ e e'}$$

tal que $1 \cdot 1 = 1 > 0$; i.e., $\vec{u} + \vec{v} \notin W$.

L4:

22. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x; 3x+x^2; 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2 .

$$p_1(x) = 1 + x$$

$$p_2(x) = 3x + x^2$$

$$p_3(x) = 2 + x - x^2$$

Se

$$\alpha \cdot p_1(x) + \beta \cdot p_2(x) + \gamma \cdot p_3(x) = 0,$$

então vamos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(isso para mostrar que são L.I.)

$$\alpha \cdot (1+x) + \beta \cdot (3x+x^2) + \gamma \cdot (2+x-x^2) =$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$\beta = \gamma$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \alpha = -4\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ -2\beta &= -4\beta \end{aligned}$$

$$2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 ; \quad \alpha = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$; ou seja, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ e $\eta_3(x)$ são L.I. em P_2 .

L4:

24. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V , prove que o conjunto $\{2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}, 3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}\}$ é L.D.

$$\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ é L.I.}$$

Mostre:

$$\gamma := \{ \underbrace{2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}}, \underbrace{\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}}, \underbrace{3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}} \}$$

é L.D.

dejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a. (2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + b(\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}) + c(3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}) = \vec{0}$$

$$(2a + b + 3c)\vec{u} + (-a + 2b - 4c)\vec{v} + (a - 3b + 5c)\vec{w}$$

$$= \vec{0} = (0, 0, 0).$$

pois $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.i.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ -a + 2b - 4c = 0 \\ a - 3b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$-b + c = 0 \rightarrow b = c$$

somando as três eq.:

$$2a + 4c = 0$$

$$a = -2c$$

Na 1ª eq., vem:

$$2.(-2c) + c + 3c = 0$$

$$-4c + 4c = 0$$

ou seja, $0 = 0$ (OK)!

concluindo que

$$a = -2c \text{ e } b = c;$$

ou seja, o sist. linear acima possui a solução:

$$S = \{ (-2c, c, c) : c \in \mathbb{R} \}$$

i.e., o conj. S acima definido é L.D.

35. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que β não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de β .

$$\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Para ser base deve ser l.i. e deve gerar o $\mathbb{R}^3$. Logo, para β não ser base do $\mathbb{R}^3$, alguma dessas condições deverá ser falsa.

É l.D. pois:

$$(1, 2, 1) = (0, 1, 1) + (1, 1, 0)$$

Então, β não pode ser base do $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $\gamma = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

AF.01: γ é l.t.:

$$a \cdot (0, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 0. \quad ; \quad \text{i.e., } \gamma \text{ é l.t.}$$

AF.02: $[\gamma] = \mathbb{R}^3$:

Como $[\gamma] \subset \mathbb{R}^3$ sempre vale, resta mostrar que $\mathbb{R}^3 \subset [\gamma]$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; precisamos mostrar que é uma comb. linear dos elementos de γ ; i.e.;

$$(x, y, z) = a \cdot (0, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{b=x} \Rightarrow \\ a+b=y \rightarrow a=y-b \Rightarrow \textcircled{a=y-x} \\ a+c=z \end{cases}$$

$$\rightarrow c = z - a$$

$$c = z - (y-x)$$

$$\textcircled{c = z - y + x}$$

Portanto;

$$(x, y, z) = (y-x) \cdot (0, 1, 1) + x(1, 1, 0) + (z-y+x)(0, 0, 1)$$

$$\in [\gamma]$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 \subset [\gamma]$; i.e. vale a AF02

Seles AF. 01 e 02 segue que $[\gamma] = \mathbb{R}^3$.

