ÁLGEBRA LINEAR I

13/11/25 – AULA 16

Na aula passada estudamos vetores L.I. e L.D.

Também vimos o importante conceito de base de um espaço vetorial V. Recordando: um conjunto $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é uma base para V se, e só se:

(i) β é L.I. ;

(ii) $[\beta] = V$.

Vejamos outros exemplos:

01) $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{\underbrace{(1,-1)}_{\vec{v}_1}; \underbrace{(-2,3)}_{\vec{v}_2}\}$

AF.: β é base para $\mathbb{R}^2$. De fato, temos que:

(i) β é L.I. :

$$a.(1,-1) + b.(-2,3) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases}$$

Somando as duas eq; obtemos: $\boxed{b=0}$

Assim; $a = -3b$

$a = -3.0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

Logo, o conj. $\beta = \{(1,-1); (-2,3)\}$ é L.I.

(ii) $[(1,-1); (-2,3)] = \mathbb{R}^2$.

Como $[(1,-1); (-2,3)] \subset \mathbb{R}^2$ sempre vale, basta mostrar que $\mathbb{R}^2 \subset [(1,-1); (-2,3)]$.

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y) = a.(1,-1) + b.(-2,3).$$

De fato, supondo a igualdade acima válida:

$$+\begin{cases} \cancel{a} - 2b = x \\ -\cancel{a} + 3b = y \end{cases}$$

$$\boxed{b = x+y}$$

$a - 2b = x$

$a = x + 2b$

$a = x + 2(x+y)$

$\Rightarrow \boxed{a = 3x + 2y}$

Conclusão:

$$(x,y) = (3x+2y).(1,-1)+(x+y).(-2,3) \in \beta \;;$$

ou seja, $(x,y) \in [(1,-1);(-2,3)]$

Logo, vale (ii).

De (i) e (ii) segue que $\beta = \{(1,-1);(-2,3)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

02) $V := P_2$: o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

Verifique e o conjunto $\{2, 1-x, x^2+x\}$ é uma base para P_2.

Solução:

AF. 01: $\{2, 1-x, x^2+x\}$ é L.I.:

De fato, se

$$\alpha.2+\beta.(1-x)+\gamma.(x^2+x) = 0 = 0+0x+0x^2,$$

então:

$$2\alpha + \beta - \beta x + \gamma x^2 + \gamma x = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(2\alpha + \beta) + (-\beta + \gamma)x + \gamma x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \beta = 0$$

$\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0;\ \beta = 0$ e $\gamma = 0$, ou seja, o conjunto $\{2;\ 1-x;\ x^2+x\}$ é L.I.

AF 02: $[2;\ 1-x;\ x^2+x] = P_2$.

Como $[2;\ 1-x;\ x^2+x] \subset P_2$, por definição de subespaço gerado, resta mostrar que

$$P_2 \subset [2;\ 1-x;\ x^2+x].$$

Seja $a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 \in P_2$.

Então, vamos mostrar que tal vetor está

no subespaço gerado $[2;\ 1-x;\ x^2+x]$.

De fato, impondo:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 = \alpha . 2 + \beta(1-x) + \gamma(x^2+x)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (2\alpha + \beta) + (-\beta + \gamma)x + \gamma x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = a_0 \\ -\beta + \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2 \end{cases}$$

$$\beta = \gamma - a_1$$

$$\boxed{\beta = a_2 - a_1}$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha + \beta = a_0$$

$$2\alpha = a_0 - (a_2 - a_1)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}}$$

Portanto, obtemos:

$$a_0 + a_1 . x + a_2 x^2 = \left(\frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}\right) . 2 + (a_2 - a_1)(1-x) +$$

$$+ a_2 (x^2 + x) \in [2, 1-x; x^2+x]$$

Portanto, vale a AF.02.

Dos afirmações 01 e 02 segue que $\{2; 1-x; x^2+x\}$ é uma base para P_2.

TEOREMA: Seja V um espaço vetorial gerado por n vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ não nulos. Então, podemos extrair uma base dessa coleção.

DEMONSTR.: Seja $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n]$.

Se o conj. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ já for L.I., então tal conjunto já será uma base para V.

Se for L.D., então, pela proposição da

aula passada segue que pelo menos um dos n vetores desta coleção será combinação linear dos demais.

Sem perda de generalidade, assuma que $\vec{v}_n$ seja combinação linear dos demais. Então, tanto ele quanto qualquer outro vetor de V que o usaria para ser montado poderá ser montado usando os demais vetores. Ou seja, o conj: $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$ ainda gera V, isto é,

$$V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}]$$

Logo, se $\{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{n-1}\}$ já for L.I.; então tal conj. já é uma base para V.

Se for L.D., então, ainda há um vetor que é comb. linear dos demais.

Sem perda de generalidade, assuma que seja $\vec{v}_{n-1}$. Tirando-o da lista, ainda teremos $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-2}]$, ou seja, o conj. $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-2}\}$ gera V. Se ele for L.I; já é base para V; caso contrário, repetimos o processo de retirada de vetores que deixariam L.D.

Repetimos este processo um número finito de vezes até restar o conj. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_K\}$, $K \leq n$, sendo L.I, e gerando V. Ou seja, uma base para V.

$\square$

<u>Ex:</u> $V = \mathbb{R}^2$.

$$\{(1,-1); (4,1); (3,3)\}.$$

<u>AF:</u> o conj. $\{(1,-1); (4,1); (3,3)\}$ é L.D.

Então, um dos vetores é comb. dos demais. Por exemplo:

$$(3,3) = a.(1,-1) + b.(4,1)$$

$$+\begin{cases} a + 4b = 3 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$5b = 6$$

$$b = \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} a = 3 - 4b \\ a = 3 - 4 \cdot \frac{6}{5} \\ a = 3 - \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$a = -\frac{9}{5}$$

Logo:

$$(3,3) = -\frac{9}{5} \cdot (1,-1) + \frac{6}{5}(4,1)$$

Então, o conj. $\{(1,-1) ; (4,1)\}$ ainda gera $\mathbb{R}^2$ e será L.I (Verifique!)

Logo $\{(1,-1) ; (4,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA: Seja V um espaço vetorial gerado por um número finito de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Então, qualquer conjunto com mais do que n vetores será L.D.

DEMONSTR.: Seja $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$.

Pelo teorema anterior, segue que podemos extrair uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ para V, onde $k \leq n$.

Seja $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ um conjunto de m vetores de V, com $m > n$.

Como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ é uma base para V, então qualquer vetor de V é representado como uma combinação linear dessa base. Assim:

$$(*) \begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + a_{12} \vec{v}_2 + \dots + a_{1k} \vec{v}_k \\ \vec{w}_2 = a_{21} \vec{v}_1 + a_{22} \vec{v}_2 + \dots + a_{2k} \vec{v}_k \\ \vdots \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_m = a_{m1}\vec{v}_1 + a_{m2}\vec{v}_2 + \cdots + a_{mk}\vec{v}_k .$$

Queremos mostrar que

$$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\} \text{ é L.D.}$$

Assim, montando a igualdade:

$$\alpha_1 . \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \cdots + \alpha_m . \vec{w}_m = \vec{0},$$

com as igualdades em (*), vem:

$$\alpha_1 . (a_{11} . \vec{v}_1 + \cdots + a_{1k}\vec{v}_k) + \alpha_2 . (a_{21}\vec{v}_1 + \cdots + a_{2k}\vec{v}_k) +$$

$$\cdots + \alpha_m . (a_{m1}\vec{v}_1 + \cdots + a_{mk}\vec{v}_k) = \vec{0}$$

$$(a_{11} . \alpha_1 + a_{21} . \alpha_2 + \cdots + a_{m1} . \alpha_m)\vec{v}_1 + \cdots$$

$$\cdots + (a_{1k}\alpha_1 + a_{2k}\alpha_2 + \cdots + a_{mk}\alpha_m)\vec{v}_k = \vec{0}$$

Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ é base de V,

segue que todos os escalares da igualdade acima são zeros (pois são L.I os k vetores)

Assim:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \alpha_1 + a_{21} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{m1} \cdot \alpha_m = 0 \\ a_{12} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \dots + a_{m2} \alpha_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1k} \cdot \alpha_1 + a_{2k} \alpha_2 + \dots + a_{mk} \alpha_m = 0 \end{cases};$$

que é um sistema linear homogêneo, com k equações a m variáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. onde $k \leq n < m$. Logo possui soluções não triviais (infinitas); possuindo assim, soluções não nulas. Ou seja, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ poderão ser $\neq 0$.

Logo, o conj: $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ é L.D.

$\square$