

Na aula anterior vimos vários exemplos e contra-exemplos de subespaços vetoriais.

Vimos também o seguinte resultado:

PROP.: W_1, W_2 subespaços de $V \Rightarrow W_1 \cap W_2$ é subespaço de V .

Def.: Seja V um espaço vetorial e $W_1, W_2 \subset V$ dois subespaços vetoriais de V . Definimos o conjunto $W_1 + W_2$ por:

$$W_1 + W_2 = \{ u + v : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2 \}.$$

PROPOSIÇÃO: O conjunto $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial de V . (ou seja, soma de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial)

DEMONSTR.: Sejam W_1 e W_2 dois subespaços
vetoriais de um espaço vetorial V .

Vamos mostrar que $W_1 + W_2$ também é
subespaço vetorial de V .

Primeiramente, note que $W_1 + W_2 \neq \emptyset$.

De fato, como W_1 e W_2 são subespaços,
segue que $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$. Além disso,

$$0 = \underbrace{0}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2.$$

Sejam $x, y \in W_1 + W_2$, e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que:

$$(i) \quad x + y \in W_1 + W_2;$$

$$(ii) \quad \alpha x \in W_1 + W_2.$$

Como $x, y \in W_1 + W_2$, então existem

$$u_1, u_2 \in W_1 \quad \text{e} \quad v_1, v_2 \in W_2 \quad \text{tais que}$$

$$x = u_1 + v_1 \quad \text{e} \quad y = u_2 + v_2.$$

Além, temos que:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \underline{x+y} &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = \\ &= \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\substack{\in W_1 \\ \text{pois } W_1 \text{ é} \\ \text{subespaço}}} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\substack{\in W_2 \\ \text{pois } W_2 \text{ é} \\ \text{subespaço}}} \in \underline{W_1 + W_2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y \in W_1 + W_2}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \underline{\alpha \cdot x} &= \alpha \cdot (u_1 + v_1) = \underbrace{\alpha \cdot u_1}_{\substack{\in W_1 \\ \text{pois } W_1 \text{ é} \\ \text{subespaço}}} + \underbrace{\alpha \cdot v_1}_{\substack{\in W_2 \\ \text{pois } W_2 \text{ é} \\ \text{subespaço}}} \in \underline{W_1 + W_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \cdot x \in W_1 + W_2}$$

□

Estes dois resultados, combinados, fornecem a seguinte definição:

Def: Dizemos que um espaço vetorial V é a SOMA DIRETA de subespaços vetoriais W_1 e W_2 se, e só se, $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Neste caso, escrevemos

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

ou seja, V é a soma direta entre W_1 e W_2 .

Exemplos:

01) $V = \mathbb{R}^2$ e vejamos

$$W_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, note que $V = W_1 + W_2$,

para: $\forall (x, y) \in V = \mathbb{R}^2$, temos:

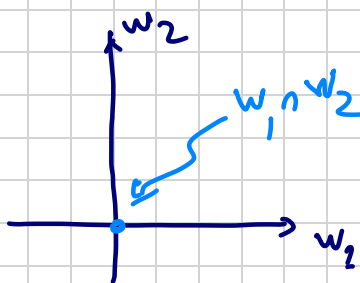
$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

Logo, $\mathbb{R}^2 \subset W_1 + W_2$.

Além disso, $W_1 + W_2 \subset \mathbb{R}^2$, por definição.

Do mesmo modo, temos que

$$W_1 \cap W_2 = ?$$



$$W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

>

$$(0, 0) \in W_1 \cap W_2$$

De fato; se $(a, b) \in W_1 \cap W_2$, então devemos

$$\text{ter: } (a, b) = (x, 0) \quad (\text{pois } \in W_1)$$



$$\begin{array}{l} a = x \\ \boxed{b = 0} \end{array}$$

e ao mesmo tempo, devemos ter:

$$(a, b) = (0, y) \quad (pois \in w_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a=0}$$

$$b=y$$

$$\text{conclusão: } (a, b) \in w_1 \cap w_2 \Leftrightarrow a=0 \text{ e } b=0$$

$$\text{ou seja; } w_1 \cap w_2 = \{(0, 0)\}$$

$$\text{conclusão: } \mathbb{R}^2 = w_1 + w_2 \text{ com } w_1 \cap w_2 = \{(0, 0)\},$$

$$\text{ou seja; } \mathbb{R}^2 = w_1 \oplus w_2.$$

obs.: A soma direta de um espaço vetorial é uma decomposição do mesmo em somas de subespaços.

Nos próximos conceitos, vamos denotar vetores usando setas. Ou seja, um vetor u será indicada por $\vec{u}$.

COMBINAÇÃO LINEAR:

Def.: Sejam V um espaço vetorial e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vetores em V . Dizemos que um vetor $\vec{w} \in V$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ se, e somente se, existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n.$$

Ex.: $V = \mathbb{R}^2$ e sejam $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 3)$.

Então, o vetor $\vec{w} = (5, 7)$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$?

Solução: para que $\vec{w}$ seja combinação linear entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, devemos obter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 ;$$

ou seja:

$$(5, 7) = \alpha \cdot (1, -1) + \beta \cdot (2, 3)$$

$$(5, 7) = (\alpha + 2\beta, -\alpha + 3\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 5 \\ -\alpha + 3\beta = 7 \end{cases}$$

$$5\beta = 12$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{12}{5}}$$

$$\alpha = 5 - 2\beta$$

$$\alpha = 5 - 2 \cdot \frac{12}{5}$$

$$\alpha = \frac{25 - 24}{5}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{5}}$$

Assim, obtemos:

$$(5, 7) = \frac{1}{5} \cdot (1, -1) + \frac{12}{5} \cdot (2, 3) ;$$

ou seja:

$$\vec{w} = \frac{1}{5} \vec{v}_1 + \frac{12}{5} \vec{v}_2 ; \text{ i.e.,}$$

$\vec{w}$ é uma combinação linear entre os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Def: Dados os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ em um espaço vetorial V , definimos o conjunto

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m] = \left\{ \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\},$$

como o conjunto de todas as combinações lineares possíveis com os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

Prop: O conjunto $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m]$ de todas as combinações lineares possíveis com os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ é um subespaço vetorial, e é chamado de SUBESPAÇO GERADO pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

DEMONSTR: Dados $\vec{u}, \vec{w} \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que:

$$(i) \quad \vec{u} + \vec{w} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m];$$

$$(ii) \quad \alpha \cdot \vec{u} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m].$$

De fato, como $\vec{u}, \vec{w} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$, então
 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

$$\text{e} \quad \vec{w} = \beta_1 \cdot \vec{v}_1 + \beta_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \cdot \vec{v}_n$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \underline{\vec{u} + \vec{w}} &= (\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n) + (\beta_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \cdot \vec{v}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{v}_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{v}_n \in \\ &\quad \underline{[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \underline{\alpha \cdot \vec{u}} &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n) \\ &= (\alpha \cdot \alpha_1) \vec{v}_1 + (\alpha \cdot \alpha_2) \vec{v}_2 + \dots + (\alpha \cdot \alpha_n) \vec{v}_n \in \\ &\quad \underline{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]} \end{aligned}$$

Portanto, por (i) e (ii) segue que $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$
é um subespaço vetorial do espaço vetorial V .

NOTAÇÃO: O subespaço gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ também pode ser denotado por:

$$\begin{aligned} [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] &= \text{ger}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \\ &= \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO: O subespaço gerado $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ é o menor subespaço vetorial de V que contém os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

DEMONSTRE: Seja W um outro subespaço de V que contém os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.
Vamos mostrar que $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] \subset W$.

De fato, dada $\vec{u} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$, então,
 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in W$ e W é subespaço,

retornar, então $\alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \in W$;
ou seja, mostramos que $\bar{u} \in W$.

Dele arbitrariedade da escolha de $\bar{u} \in [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n]$,
mostramos que

$$[\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] \subset W$$

□
