ÁLGEBRA LINEAR I

04/11/25 - AULA 13

Na aula passada estudamos espaços vetoriais e iniciamos o estudo de subespaço vetorial.

Dado $W \subset V$, onde V é um espaço vetorial, dizemos que W é subespaço vetorial de V se, e somente se;

(i) $\forall\, u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

(ii) $\forall\, u \in W,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha . u . \in W$.

Vimos um exemplo de subespaço. Vejamos outros:

02) $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x,y) : y = 2x\}$.

(i.e., em $\mathbb{R}^2$, W é uma reta que passa pela origem do $\mathbb{R}^2$).

Afirmamos que W é um subespaço vetorial de V. De fato, como

$$W = \{(x,y) : y = 2x\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\};$$

sejam $u = (a, 2a)$ e $v = (b, 2b)$, vetores em W; e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, tem-se que:

(i) $u + v = (a, 2a) + (b, 2b) =$

$$= (a+b, 2a+2b) =$$

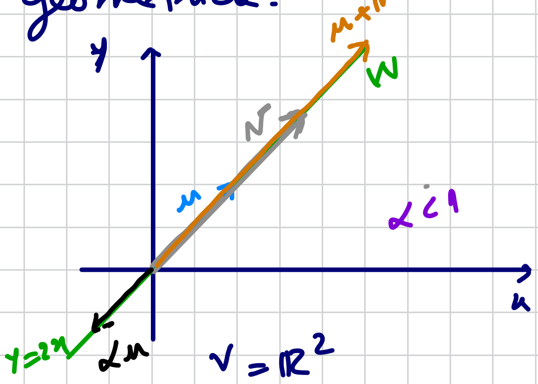
$$= (a+b, 2(a+b)) \in W;$$

(ii) $\alpha . u = \alpha . (a, 2a) = (\alpha . a, \alpha . 2a)$

$$= (\alpha . a, 2.(\alpha . a)) \in W.$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de V.

Neste caso, podemos apresentar uma interpretação geométrica:



03) $V = \mathbb{R}^2$ e seja $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x+1\}$.

Neste caso, W não é subespaço vetorial de V.

De fato, como

$$W = \{(x, 2x+1) : x \in \mathbb{R}\}, \text{ então;}$$

sendo $u = (a, 2a+1)$ e $v = (b, 2b+1)$, i.e.; $u, v \in W$, então:

(i) $u+v = (a, 2a+1) + (b, 2b+1) =$

$= (a+b, 2a+1+2b+1) = (a+b, 2(a+b)+2)$

$= (a+b, 2(a+b)+1 \underbrace{+1}) \notin W$

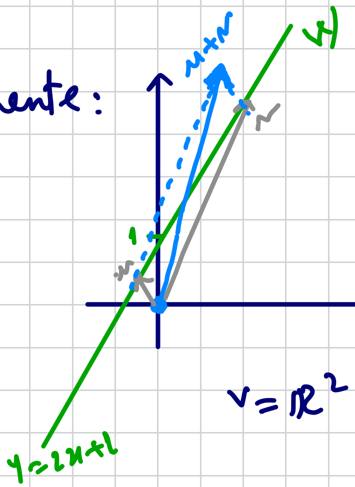
Ou seja, temos $u, v \in W$, mas $u+v \notin W$

Logo, W não é subespaço vetorial de V.

Além disso, podemos observar que $0 = (0,0) \notin W$,

logo, W de fato não é subespaço vetorial de V.
(porque um subespaço vetorial deve conter o vetor nulo)

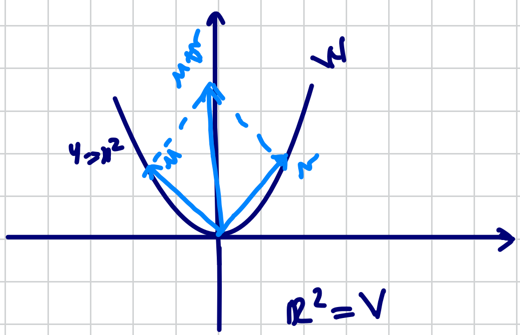
geometricamente:



u, v ∈ W (ponta da seta em W), mas u+v ∉ W

04) $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) : y = x^2\}$;

ou seja, $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$



Geometricamente percebemos que W não é

subespaço vetorial de V, muito embora contenha a origem $(0,0)$. Verifiquemos algebricamente:

Dados $u=(a,a^2)$ e $v=(b,b^2)$ vetores em W. Então:

(i) $u+v=(a,a^2)+(b,b^2)=$

$$=(\underbrace{a+b}, \underline{a^2+b^2}) \notin W$$

$$(a+b)^2 = a^2+\underline{\underline{2ab}}+b^2.$$

Ou seja, a soma de vetores em W sai de W, i.e, a soma não é fechada em W.

Portanto, W não é subespaço vetorial de V.

05) Seja $V=P_n$ o espaço vetorial de polinômios de grau menor ou igual a n; munido da adição usual de polinômios e o produto usual de um escalar por um polinômio.

Considere $W \subset V$ o subconjunto:

$$W = \{ p(x) \in V : p(0) = 0 \}.$$

Af.: $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V.

De fato, sejam $p, q \in W$. Assim, tem-se que $p(0) = 0$ e $q(0) = 0$. Então:

(i) $(p+q)(0) := p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow (p+q)(0) = 0$; i.e.,

$$\boxed{p + q \in W.}$$

(ii) $(\alpha . p)(0) = \alpha . p(0) = \alpha . 0 = 0$

$\Rightarrow (\alpha . p)(0) = 0$; i.e., $\boxed{\alpha . p \in W.}$

Ou seja, W é subespaço vetorial de V.

06) Seja $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas com entradas reais; com a adição usual de matrizes e o produto usual de um escalar real por uma matriz.

Seja $W \subset V$ o conjunto:

$$W = \{ A \in V \ : \ A^t = A \};$$

[Obs.: Quando $A^t = A$, dizemos que A é uma matriz simétrica.]

Perguntamos: W é subespaço vetorial de V?

Dados $A, B \in W$, precisamos verificar se:

(i) $A + B \in W$

(ii) $\alpha . A \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

De fato:

(i) $\underbrace{(A+B)^t}$ $\underset{\uparrow}{=}$ $\overbrace{A^t}^{=A} + \overbrace{B^t}^{=B} = \underbrace{A+B} \Rightarrow A+B \in W$

propriedade da transposta

(ii) $\underbrace{(\alpha.A)^t} = \alpha.\underbrace{A^t}_{=A} = \underbrace{\alpha.A} \Rightarrow \alpha.A \in W.$

07) $V = \mathbb{R}^3$ com suas operações usuais.

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y = 0\}.$

W é subespaço vetorial de V ?

Solução:

$x = 2y$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\} =$

$= \{(2y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$

Sejam $u = (2a, a, b)$; $v = (2y, y, z) \in W$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos verificar se:

(i) $u+v \in W$;

(ii) $\alpha . u \in W$.

(i) : $u+v = (2a, a, b) + (2y, y, z) =$

$= (2a+2y, a+y, b+z) = (2(a+y), a+y, b+z) \in W$

(ii): $\alpha . u = \alpha . (2a, a, b) = (\alpha . 2a, \alpha a, \alpha . b)$

$= (2.(\alpha a), \alpha a, \alpha b) \in W$.

Portanto, W é um subespaço vetorial de V.

08) De uma prova de 2016:

Questão 06. O conjunto $W = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : A$ é inversível$\}$ munido da adição usual de matrizes e o produto usual de um escalar por uma matriz é um subespaço vetorial de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$? Justifique.

Solução:

W não é subespaço de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, pois para ser subespaço, "W" deve conter o neutro aditivo, que seria a matriz nula. Porém, a matriz nula não é inversível.

PROPOSIÇÃO: Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, $W_1 \cap W_2$ também é um subespaço vetorial do espaço vetorial V.

(i.e.; a interseção de subespaços é um subespaço)

DEMONSTR.: Dados W_1 e W_2 subespaços de V.

A mostrar: $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

Note que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ pois $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$. Logo, $0 \in W_1 \cap W_2$. (i.e., ambos contém o vetor nulo). Logo, $W_1 \cap W_2$ está bem definido.

Assim, sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$. Então,

em particular tem-se que $u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$

Como W_1 e W_2 são subespaços de V, segue que:

(i) $u + v \in W_1$ e $u + v \in W_2 \Rightarrow u + v \in W_1 \cap W_2$.

(ii) $\alpha u \in W_1$ e $\alpha u \in W_2 \Rightarrow \alpha u \in W_1 \cap W_2$

$\square$